"Principes d'Algèbre et de Géométrie"

Pour SMP et SMC

2ème edition

$$\delta = \pm \frac{\frac{\|\Delta\| + \Delta}{2}}{\sqrt{\frac{\|\Delta\| + \mathrm{Re}(\Delta)}{2}}}$$

Aziz.40

Dr. Aziz ARBAI

"Principes d'Algèbre et de Géométrie"

Pour SMP et SMC

2ème édition

$$\delta = \pm \frac{\frac{\|\Delta\|+\Delta}{2}}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+\mathrm{Re}(\Delta)}{2}}}$$

Aziz.40

Dr. Aziz ARBAI

Table de matières :

Part I

Chapitre I

Systèmes Linéaires

1 Introduction:

Résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, ..., x_p$, c'est déterminer tous les p-uplets $(x_1, ..., x_p)$ de IR^p vérifiant n relations linéaires:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les coefficients a_{ij}, b_i sont des éléments de IR fixés. Les b_i s'appellent les seconds membres des équations.

Tous p-uplet vérifiant les équations s'appelle une solution du système.

On notera par S l'ensemble de tous les solutions du système.

2 Exemples:

- $\left\{\begin{array}{cccc} ax & +by & = & \alpha \\ cx & +dy & = & \beta \end{array}\right.$

soit $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$

1er cas: Si $D \neq 0$, alors $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - cb}$ et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{\beta a - \alpha c}{ad - cb}$

2éme cas: Si $D = 0$ alors les deux équations du système sont les mêmes et donc il y a une infinité de solutions.

- $\left\{\begin{array}{cccc} x & -y & = & 0 \\ x & +y & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ 2x & = & 1 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

- $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & & & = & 2 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} & y & +z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \\ x & & & = & 1 \end{array}\right.$

donc, $(1, 0, 0)$ est la seul solution du système.

$$\bullet \begin{cases} 2x & +y & +z & = & 4 \\ x & +2y & +z & = & 4 \\ x & +y & +2z & = & 4 \end{cases}$$

si on somme les 3 lignes (3 équations) on va trouver que $x+y+z=3$ d'ou $x=y=z=1$

$$\bullet \begin{cases} x & +y & = & 1 \\ -x & -y & = & 0 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} x & +y & = & 1 \\ & 0 & = & 1 \end{cases}$ impossible, donc il n'y a pas de solution.

Conclusion $S=\emptyset$.

$$\bullet \begin{cases} x & +y & = & 1 \\ -x & -y & = & -1 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} x & +y & = & 1 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$
$\iff x+y=1$
d'ou $S=\{(x,1-x)/x\in IR\}$.

3 Résultas généraux:

Lorsque les seconds membres sont nuls ($b_i=0$), le système est dit **homogène**; $(0,...,0)$ est toujours solution.

Dans le cas où les b_i ne sont pas tous nuls, l'ensemble des solutions du système peut être vide, on dit alors que le système est **incompatible**.

4 Opérations sur un système:

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions. La technique de résolution d'un sysstème consiste, par une suite d'opérations sur les lignes du système, à remplacer le système initial par un système équivalent plus simple.

L'idée est de faire intervenir le moins d'inconnues possibles dans chaque ligne.

Les opérations qui remplacent un système par un système équivalent sont:

- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
- Ajouter à une ligne, une autre ou plusiers autres lignes.
- Echanger deux lignes.

5 Méthode du pivot:

Considérons deux lignes d'un système linéaire:
$L_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1$
$L_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2$

Si $a_{11}\neq 0$ alors en remplaçant L_2 par $\left(L_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}L_1\right)$, on obtient un système équivalent composé d'une nouvelle ligne (L_2') où ne figure plus l'inconnue (x_1):
$L_2' : \left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + ... + \left(a_{2p}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1p}\right)x_p = b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$

En répétant cette opération pour les autres lignes du système, on obtient un système équivalent au système initial com-

posé de la ligne L_1 inchangé, et de nouvelles lignes $L'_2, ..., L'_n$ où x_1 ne figure plus.

Le rôle du coefficient a_{11}, non nul, est primordial:

On dit que a_{11} est le pivot de cette suite d'opérations.

Puis, on peut considérer $L'_2, ..., L'_n$ comme un sous-système de système initial, dont les inconnues sont $x_2, ..., x_n$. Et, on cherche un pivot non nul pour pouvoir procéder comme précédement (c'est à dire faire disparaitre une autre variable et obtenir un autre système de $(p-2)$ variables ...).

Au bout d'un nombre fini d'opérations, on aboutit à une incompatibilité ou bien à un système équivalent de la forme:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a'_{11}x'_1 & +a'_{12}x'_2 & +\dots & & \cdots & +a'_{1p}x'_p & = & b'_1 \\ & a'_{22}x'_2 & +\dots & & \cdots & +a'_{2p}x'_p & = & b'_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a'_{rr}x'_r & +\cdots & +a'_{rp}x'_p & = & b'_r \end{array}\right.$$

où $r \leq n$.

En effet certaines lignes peuvent disparaitre: $0 = 0$ ou deux lignes identiques ...

Les pivots successifs apparaissent en tête de chaque ligne: $a'_{11}, a'_{22}, ..., a'_{rr}$, on suppose donc ces termes non nuls.

On peut également être amené à échanger la place des inconnues dans les lignes. Le système final est ainsi constitué de r équations d'inconnues $x'_1, ..., x'_r, ..., x'_p$ où les x'_i sont les x_i à l'ordre près.

On achève la résolution en exprimant, à partir de la dernière ligne, x'_r en fonction de $x'_{r+1}, ..., x'_p$, puis par récurrence, en remontant ligne par ligne, on détermine $x'_{r-1}, ..., x'_1$ en fonction de $x'_{r+1}, ..., x'_p$.

6 Rang:

Si on appelle S le système initial de n équations à p inconnues, on peut lui associer le système homogène S_0 obtenu, à partir de S, en remplaçant tous les seconds membres par 0.

En opérant sur S_0 par la méthode du pivot et en suuprimant les lignes $0 = 0$, on obtient un système équivalent de r équations. Cet entier r est indépendant de la façon dont on opère: on l'appelle **le rang** du système S.

Le rang n'indique pas, en général, si le système S est compatible.

D'autre part, le rang est toujours inférieur (ou égale) au nombre d'équations du système initial, ainsi qu'au nombre d'inconnues.

7 Résultats généraux:

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de S_0, donc

- $\mathcal{S}_0 = \{(0, ..., 0) \in IR^p\}$
- ou bien $\mathcal{S}_0$ est un ensemble infinie.

Proposition:

$\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de IR^p.

(C'est à dire: $\mathcal{S}_0$ est stable par l'addition et multiplication par un scalaire et $(0, ..., 0) \in \mathcal{S}_0$), à admetre.

Proposition:
Soit S l'ensemble des solutions de S, donc
- S est vide, dans ce cas S est un système incompatible
- ou bien S est de la forme $X^S + S_0$.
avec $X^S = (X_1, X_2, ..., X_p)$ une solution particulière de S.
C'est à dire:
Sol générale de S= Sol particulière de S
+ Sol générale de S_0

8 Remarques:

- Si $r = p$, $S_0 = \{(0, ..., 0)\}$ et S admet au plus une solution, c'est à dire $S = \{X^s\}$ ou $S =$.
- Si $r = n$, S est toujours **compatible**.
- Si $p = n = r$, S est appelé **système de Cramer**, il admet une unique solution.

9 La méthode:

On suppose ici que S est un système de Cramer, de n équations à n inconnues. C'est à dire

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +... & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +... & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On appliquant la méthode du pivot, on obtiendra

$$S\prime : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{11}x_1 & +a'_{12}x_2 & +... & +a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & a'_{22}x_2 & +... & +a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & +a'_{nn}x_n & = & b'_n \end{array} \right. .$$

S' est dit système triangulaire.

Puis on determine $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$, dite la **phase de remontée.**

10 Application :

Exemple-1:
Soit

$$S : \left\{ \begin{array}{cccccc} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ 12x_1 & -8x_2 & +6x_3 & +10x_4 & = & 26 \\ 3x_1 & -13x_2 & +9x_3 & +3x_4 & = & -19 \\ -6x_1 & +4x_2 & +x_3 & -18x_4 & = & -34 \end{array} \right.$$

1- On écrira le système de la forme:

$$\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \end{array} \right]$$

2- On triangularise le premier bloc

$0 \neq a$, or, quient absude donc
le système est incompatible

$$\begin{array}{r} l_1 \to l_1' \\ l_2 - 2l_1 \to l_2' \\ 2l_3 - l_1 \to l_3' \\ l_1 + l_4 \to l_4' \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -24 & 16 & 2 & -54 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -18 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} l_1' \to l_1'' \\ l_2' - 2l_1' \to l_2'' \\ l_3' \to l_3'' \\ 6l_4' + l_3' \to l_4'' \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & -8 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 26 & -83 & -135 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} l_1'' \to l_1''' \\ l_2'' \to l_2''' \\ l_3'' + 6l_2'' \to l_3''' \\ l_4'' \to l_4''' \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 26 & -83 & -135 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} l_1''' \to \\ l_2''' \to \\ l_3''' \to \\ l_4''' + 13l_3''' \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -18 \end{array}\right]$$

3- On reviend à la forme initiale (écrire le résultat sous forme d'un système).

Donc

$$S \Longleftrightarrow S' \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 8 \\ & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & -2x_3 & +5x_4 & = & 9 \\ & & & -18x_4 & = & -18 \end{array} \right.$$

4- La Phase de remontée.

D'où

$x_4 = 1 \longrightarrow x_3 = -2 \longrightarrow x_2 = 1 \longrightarrow x_1 = 3$

Et finalement

$$\boxed{S = \{(3, 1, -2, 1)\}.}$$

Exemple-2:

Soit

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 7 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} l_1 \to \\ 2l_1 - l_2 \to \\ 3l_1 - l_3 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow \boxed{r=2}$
et

$$S \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

Conclusion:
$\boxed{S = \{(1, 2-x, x)\,/x \in IR\}}$.

Exemple-3:
Soit

$$\text{S:} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} l_1 \rightarrow \\ 2l_1 - l_2 \rightarrow \\ 3l_1 - l_3 \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ impossible}$$

$\Longrightarrow \boxed{r=2}$

mais $\boxed{S = \emptyset}$.
0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)) sont $(x-y, y-z, z)$.

Part II

Chapitre II

Propriètes vectorielles de IR^n

On fixe un entier $n > 0$ et on rappelle que IR^n est l'ensemble des n-uplets de nombres réels :

$$IR^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)/\ x_1, x_2, ..., x_n \in IR\}$$

qu'on considèrera dans ce chapitre comme un ensemble de vecteurs.

11 Addition et multiplication par un scalaire:

On dispose sur cet ensemble de deux opérations naturelles: l'addition
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) =$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in IR^n$, $\forall (y_1, y_2, ..., y_n) \in IR^n$
et la multiplication par un scalaire

$$\boxed{\alpha.(x_1,x_2,...,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)}$$

$\forall \alpha \in IR$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in IR^n$.
Ces deux opérations ont les propriétés suivantes :
(1) (associativité) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in IR^n$;
(2) (commutativité) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in IR^n$;
(3) (existence d'un élément neutre)
$\exists e \in IRn / \forall a \in IR^n$, $a + e = a$ (avec $e = (0, 0, ..., 0)$);
(4) (existence d'opposés)
$\forall a \in IR^n\ \exists a' \in IR^n / a + a' = e$ (avec $a' = -1.a$);
(5) (associativité) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$,
$\forall a \in IR^n$ et $\forall (\alpha, \beta) \in IR^2$;
(6) (1 est neutre) $1.a = a\ \forall a \in IR^n$;
(7) (distributivité) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$,
$\forall a \in IR^n$ et $\forall \alpha, \beta \in IR$;
(8) (distributivité) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$,
$\forall a, b \in IR^n$ et $\forall \alpha \in IR$.
On note habituellement 0 pour $(0, 0, ..., 0)$
et $-a$ pour $-1.a$.

Les propriétés ci-dessus sont vérifiées pour d'autres ensembles munis d'une addition et d'une multiplication par un scalaire réel, on les appelle des **espaces vectoriels réels**.

Par exemple, si A est un ensemble, l'ensemble des applications de A dans IR muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies par

$$f+g: \begin{array}{ccc} A & \to & IR \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

$$\alpha f: \begin{array}{ccc} A & \to & IR \\ x & \longmapsto & \alpha f(x) \end{array}$$

(où $f; g$ sont des fonctions de A dans IR et $\alpha \in IR$)
est un espace vectoriel réel.

12 Combinaisons linéaires et sous-espaces:

Définition:

Soient a un élément de IR^n

et $F = (v_1, v_2, ..., v_k)$ une famille d'éléments de IR^n. On dit que a est combinaison linéaire de la famille F s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tels que

$$a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

Exemple:

Dans IR^3, le vecteur $(1, -2, 3)$ est combinaison linéaire de la famille $((1, 1, 0); (1, 4, -3))$

car $(1, -2, 3) = 2.(1, 1, 0) - (1, 4, -3)$.

Définition:

Un sous-espace vectoriel de IR^n est un ensemble $E \subset IR^n$ non vide, stable par l'addition et la multiplication par un scalaire, c'est-à-dire tel que :

$$\forall a, b \in E \ , \ a+b \in E \text{ et } \forall \alpha \in IR, \forall a \in E \ , \ \alpha a \in E \ .$$

On constate facilement qu'un sous-espace vectoriel de IR^n vérifie les huit propriétés définissant un espace vectoriel. En particulier, il contient toujours 0 (qui est donc son élément neutre pour l'addition).

De plus, notons que $E \subset IR^n$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si toutes les combinaisons linéaires d'éléments de E sont dans E.

Exemples:

- Un plan vectoriel ou une droite vectorielle de IR^3 en sont des sous espaces vectoriels.
- L'ensemble $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de IR^n.
- Également, IR^n est un sous-espace vectoriel de IR^n.
- Par contre, un plan (ou une droite) affine de IR^3 ne passant pas par $(0, 0, 0)$ n'en est pas un sous-espace vectoriel.
- Un cercle de IR^2 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Proposition:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de IR^n en est également un sous-espace vectoriel.

Remarquons que ce n'est en général pas le cas de l'union de deux sous espaces (il suffit de prendre deux droites vectorielles distinctes de IR^2).

Proof. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de IR^n et $E = E_1 \cap E_2$.

On sait que E_1 et E_2 contiennent tous les deux le vecteur nul 0, donc E est non vide.

Considérons $a, b \in E$. Alors a, b sont dans E_1, qui est un sous-espace vectoriel, donc $a + b \in E_1$.

De même a, b sont dans E_2 donc $a + b \in E_2$.

Ainsi, $a + b \in E$.

De même, pour tout $a \in E$ et tout $\alpha \in IR$, on a d'une part $a \in E_1$ donc $\alpha a \in E_1$, et d'autre part $a \in E_2$ donc $\alpha a \in E_2$.

Ainsi, $\alpha a \in E$ et donc E est bien stable par l'addition et la multiplication par un scalaire. ■

13 Famille, génération, liberté:

On se place maintenant dans un sous-espace vectoriel E de IR^n. Il faut se rappeler que ce cadre englobe IR^n lui-même.

Définition:

Soit S une partie de E. On note $vect(S)$ et on appelle **sous-espace (vectoriel) engendré par S** l'ensemble des combinaisons linéaires de familles finies d'éléments de S :

$$vect(S) = \left\{a \in E / \exists k \in IN^*, \exists (v_1, v_2, ..., v_k) \in S^k, \exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in IR^k, a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right\}$$

Évidemment, si on considère une famille $F = (v_1, v_2, ..., v_k)$ de vecteurs de E, on définit $vect(F)$ de façon similaire.

Remarque:

$Vect(S)$ est toujours un sous espace vectoriel.

Exemples:

- Le sous-espace de IR^2 engendré par le cercle de centre 0 et de rayon 1 est IR^2,

car tout vecteur peut s'écrire comme un multiple d'un vecteur de norme 1 ($v = \|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}$).

- Le sous-espace de IR^3 engendré par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ est le plan vectoriel

$\{(\alpha, \beta - \alpha, -\beta) / \alpha, \beta \in IR\}$.
On peut vérifier que c'est le plan d'équation
$x + y + z = 0$
où x, y, z représentent les coordonnées canoniques.

Définition:

Une famille $F = (v_1, v_2, ..., v_k)$ de vecteurs de E est dite **génératrice** si on a $vect(F) = E$.

Il faut toujours faire attention à ce qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur E quand on utilise cette notion, quitte à préciser la famille F est génératrice dans E , ou plus élégamment la famille F engendre E . Changer l'ordre des éléments d'une famille ne change pas son caractère générateur ou non (grâce à la commutativité de l'addition).

Exemples:

- La famille $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ n'est pas génératrice dans IR^3. Par contre, d'après ce qu'on a dit à l'exemple précédent, elle est génératrice dans le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.
- La famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est génératrice dans IR^3

car $\forall (x,y,z) \in IR^3$ on a
$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$.

Définition:

Une famille $F = (v_1, v_2, ..., v_k)$ de vecteurs de E est dite **libre** si pour tous $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in IR$ on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarques:

- Changer l'ordre des éléments d'une famille ne change pas son caractère libre ou lié.

- $(v_1, v_2, ..., v_k)$ des vecteurs de E est **libre** si et seulement si

$$rg(v_1, v_2, ..., v_k) = k.$$

Exemples:

- La famille $((1,-1,0);(0,1,-1))$ de IR^3 est libre,

car si α, β sont des réels tels que
$\alpha(1,-1,0) + \beta(0,1,-1) = 0$,
on a donc $(\alpha, \beta - \alpha, -\beta) = (0,0,0)$
d'où $\alpha = \beta = 0$.

- La famille $((1,1,0);(3,3,0))$ de vecteurs de R3 est liée,

car on a $3(1,1,0) - (3,3,0) = (0,0,0)$ alors que les coeficients 3 et -1 ne sont pas tous nuls.

- La famille $(v_1, v_2, ..., v_k)$ est liée dès que l'un de ses vecteurs est nul.

En effet, si on a par exemple $v_1 = 0$, alors $v_1 + 0v_2 + 0v_3 + ... + 0v_k = 0$ alors que les coefficients $1, 0, 0, ..., 0$ ne sont pas tous nuls.

Le cas où un autre vecteur est nul s'en déduit par permutation.

Il est facile de vérifier que la famille (v) de IR^3 est libre si et seulement si $v \neq 0$.

Proposition:

Soit $F = (v_1, v_2, ..., v_k)$ une famille de vecteurs de E avec $k > 2$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) F est libre ;

(2) aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres ;

(3) $v_1 \neq 0$ et $\forall 2 \leq i \leq k$ on a $v_i \notin vect(v_1, ..., v_{i-1})$.

Proof. Dans un premier temps, supposons que F est libre. Si l'un de ses vecteurs, disons v_k quitte à changer l'ordre de F, est combinaison linéaire des autres alors il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ tels que $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i$. Alors on a $v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i = 0$ sans que tous les coefficients de cette combinaison linéaire soient nuls, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de liberté de F.

On a donc montré $(1) \Rightarrow (2)$.

Dans un second temps, supposons l'assertion (2) vérifiée. Le vecteur v_1 ne peut être nul, sinon on aurait $v_1 = 0.v_2$. $\forall 2 \leq i \leq k$ on a $v_i \notin vect(v_1, ..., v_{i-1})$, sinon v_i serait combinaison linéaire des autres éléments de la famille.

On a donc démontré (2) $\Rightarrow$ (3) .

Enfin, supposons l'assertion (3) vérifiée. Si F était liée, il existerait des réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$. Soit alors i_0 le plus grand indice tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. Si $i_0 = 1$, alors $v_1 = 0$ ce qui est exclu par hypothèse. Si $i_0 > 1$, on a $\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i v_i = 0$, donc $v_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} v_i$ ce qui également exclu par l'assertion (3).

Ainsi, on a (3) $\Rightarrow$ (1)

et la proposition est démontrée. ■

14 Bases:

Le principal intérêt des définitions précédentes est d'introduire la notion de base.

Définition:

Une famille de vecteurs de E est **une base** si elle est libre et génératrice.

Définition:

Soit B_E une base de E. On définit la dimension de E par $\dim E = card\{B_E\}$.

Remarque:

$\dim IR^n = n$.

Proposition:

$$\left\{\begin{array}{c} B \text{ est libre} \\ \\ card(B) = \dim E \end{array}\right. \iff B \text{ est une base de } E$$

Exemples:

- La famille $((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$ est une base de IR^3, appelée sa base canonique.

- On a vu que la famille $((1,0,0);(1,1,0);(1,1,1))$ engendre IR^3.

Elle est également libre, car si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des réels tels que $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,1,1) = 0$, on a alors $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$.

On en déduis facilement que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

En conclusion, la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base.

- Pour une droite de IR^2 ou IR^3, une base est simplement une famille ne contenant qu'un vecteur directeur.

- Pour un plan de IR^3, une base est toujours constituer par une famille ne contenant que deux vecteurs indépendants, donc ne seront jamais proportionelles.

Ce qui suit est la principale raison de définir les bases : elles donnent des coordonnées pour paramétrer E.

Proposition:

Soit $B = (v_1, v_2, ..., v_k)$ une base de E. $\forall\, a \in E$, il existe un unique k-uplet de nombres réels $(x_1, x_2, ..., x_k)$ tel que $a = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i$.

On dit que$(x_1, x_2, ..., x_k)$ sont les **coordonnées** de a dans la base B.

Proof. Soit $a \in E$; comme B est génératrice, il existe des réels $(x_1, x_2, ..., x_k)$ tel que $a = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i$.

Supposons que $(x'_1, x'_2, ..., x'_k)$ soient d'autres réels tels que $a = \sum_{i=1}^{k} x'_i v_i$.

On a alors

$$0 = a - a = a = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i - \sum_{i=1}^{k} x'_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x'_i) v_i$$

or, B est libre, donc a $x'_i = x_i$ $\forall 1 \leq i \leq k$, ce qui montre l'unicité. ■

Exemple:

On a vu plus haut que les coordonnées d'un vecteur $(x, y, z) \in IR^3$ dans la base $((1,0,0);(1,1,0);(1,1,1))$ sont $(x-y, y-z, z)$.

Part III

Chapitre III

NOMBRES COMPLEXES

15 Introduction:

15.1 Rappel et Ramarques:

- IN **est l'ensemble des entiers naturels.** C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Dans IN l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Cette équation a une solution notée -1, cette solution est un élément de l'ensemble Z.

- Z **est l'ensemble des entiers relatifs.** C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Z contient IN, c'est-à-dire que IN est contenu dans Z, ce que l'on note $IN \subset Z$.

Dans Z l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.

Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble Q.

- Q est l'**ensemble des nombres rationnels.**

C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in Z$ et $q \in Z^*$.

Q contient Z. On a donc $IN \subset Z \subset Q$.

Dans Q l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.

Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble IR.

- IR est l'**ensemble des nombres réels**. c'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.

IR contient Q. On a donc $IN \subset Z \subset Q \subset IR$.

Dans IR l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions.

Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble C.

- C est l'**ensemble des nombres complexes.**

C'est l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ avec $a \in IR$ et $b \in IR$.

C contient IR. On a donc $IN \subset Z \subset Q \subset IR \subset C$.

15.2 Coordonnés Polaires:

À tout point $M = (x, y)$ du plan on associe ses **coordonnées polaires** : un couple (r, θ) où r est un réel positif et θ un réel défini modulo 2π tels que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Ces coordonnées sont uniques (si $M \neq (0,0)$ et θ est modulo 2π).

Réciproquement, à tout couple de réels (r, θ) est associé un unique point du plan. Les coordonnées polaires du point $M = (x, y)$ différent de O vérifient :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Les points de coordonnées (r, θ) et $(r, \theta + 2\pi)$ sont égaux.

Soit c un réel strictement positif et α un réel modulo 2π . L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires vérifient

$$r = \frac{c}{\sin(\alpha - \theta)}$$

est une droite dont α est l'angle avec l'axe des abscisses et passant par le point P de coordonnées polaires $(c, \alpha + \frac{\pi}{2})$, de plus P est le projeté orthogonal de lorigine O sur cette droite (voir figure).

15.3 Rappel sur les Complexes:

$$C = \{x + iy \ / \ x \in IR \text{ et } y \in IR\}$$

Un nombre complexe z s'ecrit de facon unique $z = x + iy$ où x et y sont reels et i verifie $i^2 = -1$. x est la partie reelle de z, et y est la partie imaginaire de z. On note $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$.

Le conjugué de $z = x + iy$ est defini par : $\overline{z} = x - iy$.
$\text{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$, $\text{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$.
Le module de $z = x + iy$ est defini par : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On a, pour tous z et z' de C :
$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
$z = \overline{z} \Longleftrightarrow z$ est réel
$z\overline{z} = |z|^2$, $|\overline{z}| = |z|$, $|zz'| = |z||z'|$
Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
Si $z \neq 0$, z a pour inverse $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

16 Exponentielle complexe :

Pour $\theta \in IR$, $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$.
$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.
Cercle unité : $U = \{z \in C \ / \ |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta} \ / \ \theta \in IR\right\}$ d'où

$$U = \left\{e^{i\theta} \ / \ \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Pour tous réels θ et θ',

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$

On retrouve bien : $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$, et $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$.

On définit l'exponentielle d'un nombre complexe z quelconque par : si $z = x + iy$, avec $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$, $e^z = e^x e^{iy}$.
Pour tous z et z' dans C, on a alors $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

16.1 Formule de de Moivre :

Pour tout n de Z, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$; on l'utilise notamment pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple-1:
Ecrire $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
D'apres la Formule de *Moivre* on a

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

donc pour $n = 5$ et $\theta = x$,

$$z = \cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos x + i\sin x)^5$$

On remarque que $\cos(5x)$ est exactement la partie réelle du premier membre de l'égalité (et de z), donc il suffit de développer la puissance 5 (c.a.d. de distribuer tous) dans le second membre et extraire sa partie réelle.

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \text{Re}\left[\cos(5x) + i\sin(5x)\right] \\ &= \text{Re}\left[(\cos x + i\sin x)^5\right] \end{aligned}$$

Remark 1 *Et c'est la meme chose dans le cas générale on aura besoin toujours de développer la puissance n dans $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ pour extraire sa partie réelle, d'où le besoin d'une autre tres importante formule dite* Binôme de Newton*:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = n\times(n-1)! = n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$ *et par convention en prend* $0! = 1$

Remark 2 $C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$,
$C_n^0 = C_n^n$,
$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = C_n^{n-1} = n$
dans le cas générale

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

Remark 3 *Pour faciliter les calcules (parce qu'il y a au même temps des produits, des puissances et une sommation à faire à la fin), on dresse le tableau suivant:*

k	C_n^k	a^k	b^{n-k}	$\prod$
0	1	1	b^n	b^n
1	n	a	b^{n-1}	nab^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
k	$*$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\vdots$
$n-k$	$*$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	n	a^{n-1}	b	$na^{n-1}b$
n	1	a^n	1	a^n
				résultat$=\sum$

Donc pour calculer

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cos^k(x)\,(i\sin x)^{5-k}$$

on redresse le tableau suivant:

k	C_5^k	$\cos^k(x)$	$(i\sin x)^{5-k}$	$\prod$
0	1	1	$i\sin^5(x)$	$i\sin^5(x)$
1	5	$\cos x$	$\sin^4(x)$	$5\cos x\sin^4(x)$
2	10	$\cos^2(x)$	$-i\sin^3(x)$	$-10i\cos^2(x)\sin^3(x)$
3	10	$\cos^3(x)$	$-\sin^2(x)$	$-10\cos^3(x)\sin^2(x)$
4	5	$\cos^4(x)$	$i\sin x$	$5i\cos^4(x)\sin x$
5	1	$\cos^5(x)$	1	$\cos^5(x)$
				résultat=$\sum$

D'où,

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^5 &= i\sin^5(x)+5\cos x\sin^4(x)+\\ &-10i\cos^2(x)\sin^3(x)+\\ &-10\cos^3(x)\sin^2(x)+\\ &+5i\cos^4(x)\sin x+\cos^5(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^5 &= [\cos^5(x)+5\cos x\sin^4(x)+\\ &-10\cos^3(x)\sin^2(x)]+\\ &+i[\sin^5(x)+5\cos^4(x)\sin x+\\ &-10\cos^2(x)\sin^3(x)]\\ &= \mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)\end{aligned}$$

Conclusion:
$\cos(5x)=\cos^5(x)+5\cos x\sin^4(x)+$
$-10\cos^3(x)\sin^2(x)$

16.2 Linearisation:

Il s'agit d'écrire un produit $\cos^p\theta\sin^q\theta$, avec p et q dans IN, comme somme de termes de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(m\theta)$. On remplace cos et sin à l'aide des formules d'**Euler** :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple-2:
Linearisez $\cos^3(x)\sin^2(x)$.
on a

$$\begin{cases}\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin\theta=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\ &= -\frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 &= \left(e^{ix}\right)^2-2e^{ix}e^{-ix}+\left(e^{-ix}\right)^2\\ &= e^{i2x}-2+e^{-i2x}\end{aligned}$$

et

$$\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3=\sum_{k=0}^{3}C_3^k\left(e^{ix}\right)^k\left(e^{-ix}\right)^{3-k}$$

Donc, comme on le remarque, il faut une autre fois appliquer la formule du Binôme de Newton et redresser le tableau comme on l'a fais pour l'exemple-1.

k	C_3^k	$\left(e^{ix}\right)^k$	$\left(e^{-ix}\right)^{3-k}$	Π
0	1	1	e^{-i3x}	e^{-i3x}
1	3	e^{ix}	e^{-i2x}	$3e^{-ix}$
2	3	e^{i2x}	e^{-ix}	$3e^{ix}$
3	1	e^{i3x}	1	e^{i3x}
				$\sum(\Pi)$

d'où

$$\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = e^{-i3x} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} + e^{i3x}$$

et par conséquence,

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^2(x) &= -\tfrac{1}{32}\left(e^{-i3x}+3e^{-ix}+3e^{ix}+e^{i3x}\right) \times \\
&\qquad \times \left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{32}(e^{-ix}-2e^{-i3x}+e^{-i5x}+3e^{ix}-6e^{-ix}+3e^{-i3x}) + \\
&\quad -\tfrac{1}{32}(3e^{i3x}-6e^{ix}+3e^{-ix}+e^{i5x}-2e^{i3x}+e^{ix}) \\
&= -\tfrac{1}{32}(e^{-ix}-6e^{-ix}+3e^{-ix}+3e^{ix}-6e^{ix}+e^{ix}-2e^{-i3x}) + \\
&\quad -\tfrac{1}{32}(3e^{-i3x}+3e^{i3x}-2e^{i3x}+e^{i5x}+e^{-i5x}) \\
&= -\tfrac{1}{32}\left(-2e^{-ix}+-2e^{ix}+e^{-i3x}+e^{i3x}+e^{i5x}+e^{-i5x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{32}\left(-4\left(\tfrac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}\right)+2\left(\tfrac{e^{-i3x}+e^{i3x}}{2}\right)+2\left(\tfrac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right)\right) \\
&= -\tfrac{1}{32}\left(-4\cos x+2\cos(3x)+2\cos(5x)\right)
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\cos^3(x)\sin^2(x) = \tfrac{1}{8}\cos x - \tfrac{1}{16}\cos(3x) + -\tfrac{1}{16}\cos(5x).$$

16.3 Argument:

Soit $z' \neq 0$. Un argument de z est un reel θ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Si θ_0 est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in Z\}$. z a un unique argument dans $]-\pi, +\pi]$.

Si $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$, $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$ (l'argument d'un produit est la somme des arguments).

Si $z \neq 0$, et $n \in Z$, $z^n = |z|^n e^{in\theta}$.

17 Interpretation geometrique d'un nombre complexe, affixe:

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on associe à $z = x + iy$ le point M de coordonnées (x, y) : on dira que le point M a pour **affixe** z.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ donne une autre représentation du point M d'affixe z, en **coordonnees polaires**.

La correspondance entre **coordonnées cartesiennes** et **coordonnées polaires** est la suivante :

le module r est égal à $r = \sqrt{x^2+y^2}$;

si $r \neq 0$, l'argument θ est determine à un multiple de 2π près par : $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$.

18 Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe:

Une des motivations fondamentales de l'introduction de C est la résolution d'équations algébriques. Ainsi, dans C, lequation $z^n = a$ où a est un paramètre complexe non nul et n un entier naturel, admet exactement n solutions, ce qui revient à dire que tout nombre complexe non nul possède exactement n racines $n^{ièmes}$ distinctes. Soit $n \in IN\#$.

1) Racines $n^{ièmes}$ de lunité:

$$\{z \in C \ / \ z^n = 1\} = \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}$$

où $\forall k \in \{0, .., n-1\}$, $z_k = e^{2ik\pi/n}$.

2) Tout nombre complexe non nul $z = |z|e^{i\theta}$, avec $\theta \in IR$, a exactement n racines $n^{ièmes}$ distinctes :

$$\{z' \in C, z'^n = z\} = \left\{|z|^{1/n} e^{i\theta/n} z_k, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Exemple :

Pour $n = 3$, les racines cubiques de lunite sont $\{1, j, j^2\}$, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$.

On a $\overline{j} = j^2$.

19 Droites et cercles:

Soient A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b.

Un point M d'affixe z est sur la droite (AB) si et seulement si le rapport $\frac{z-a}{b-a}$ est reel.

L'équation du cercle de centre A et de rayon r s'écrit

$$|z - a| = r.$$

20 Equation du second degré:

Dans cette section on va donner la méthode pour résoudre les equations du deuxieme degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \in C^*, b \in C$ et $c \in C$.

$a \neq 0 \Longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ *

Soit $\delta \in C$ telque $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

δ existe toujours et c'est la racine deuxiéme (ou la racine carré) de $b^2 - 4ac$.

Si δ est une racine deuxiéme de $b^2 - 4ac$, alors $-\delta$ l'est aussi (puisque $(-\delta)^2 = \delta^2$).

Donc, δ et $-\delta$ sont les deux racines uniques de l'équation $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

D'où, il suffit de prendre une racine quelconque δ ou $-\delta$.

Par conséquence,

$* \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4a^2}$

$\Longleftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a}$

Conclusion:

$$x = \frac{b \pm \delta}{2a}$$

avec δ une racine deuxiéme de $b^2 - 4ac$.

Remarque:

Pour determiner δ tel que $\Delta = \delta^2$ il y'a deux cas.

<u>1er cas</u>:

Si $\Delta = re^{i\theta}$ alors

$$\delta = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

<u>2ème cas</u>: Si $\Delta = a + ib \in \mathbb{C}\backslash IR$ (c'est à dire Δ est un complexe non réel ou tous simplement $b \neq 0$)

alors $\delta^2 = a + ib$

Cherchons donc δ sous la forme algébrique.

Donc, soit $(x, y) \in IR^2$ tel que $\delta = x + iy$

$\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib$

$\Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = a \\ 2xy & = b \end{cases}$

$\Longrightarrow 4x^2\left(x^2 - a\right) = b^2$

$\Longrightarrow 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$

$\Longrightarrow 4X^2 - 4aX - b^2 = 0$ et $X = x^2$

$\Longrightarrow X^2 - aX - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$ et $X = x^2$

donc

$\Delta_X = a^2 + b^2 = \|\Delta\|^2 \in IR^+$

$\Longrightarrow X = \frac{a \pm \|\Delta\|}{2} \Longrightarrow x^2 = X = \frac{a + \|\Delta\|}{2}$

Car $\frac{a - \|\Delta\|}{2} \prec 0$, puisque

D'une part

On a

$\forall (a, b) \in IR^2,\ a^2 + b^2 \geq a^2$

$\Longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq a \Longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - a \geq 0$

$\|\Delta\| = \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow \|\Delta\| - a = \sqrt{a^2 + b^2} - a \geq 0$

d'où

$\frac{a - \|\Delta\|}{2} \leq 0$

D'autre part $b \neq 0$

$\Longrightarrow a^2 + b^2 \neq a^2$

$\Longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \neq a \Longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - a \neq 0$

$\frac{a - \|\Delta\|}{2} \neq 0$

c/c: $\frac{a - \|\Delta\|}{2} \prec 0$ $(*)$

et donc,

$x^2 = X = \frac{a + \|\Delta\|}{2}$ (car $x^2 \geq 0$)

Comme $\frac{a + \|\Delta\|}{2} \in IR^+$,

donc,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \|\Delta\|}{2}}$$

Or $y^2 = x^2 - a = \frac{a + \|\Delta\|}{2} - a$

donc, $y^2 = \frac{\|\Delta\| - a}{2}$ $(\succ 0)$ qui est toujours positif d'aprés $(*)$.

$$y = \pm\sqrt{\frac{\|\Delta\| - a}{2}}$$

On remarque que,

$\sqrt{\frac{\|\Delta\| - a}{2}} \times \sqrt{\frac{\|\Delta\| + a}{2}} = \sqrt{\frac{\|\Delta\|^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{4}} = \frac{|b|}{2}$

donc

$signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\| - a}{2}} \times \sqrt{\frac{\|\Delta\| + a}{2}} = \frac{b}{2} = xy \quad (**)$

Conclusion:

$$\begin{cases} x = & \sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}} \\ y = & signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\|-a}{2}} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = & -\sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}} \\ y = & -signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\|-a}{2}} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \delta_1 = & \sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}} + \left(signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\|-a}{2}}\right) i \\ \delta_2 = & -\delta_1 \end{cases}$$

car si δ_1 est une racine deuxieme de Δ, alors $(-\delta_1)$ l'est aussi.

(puisque $(-\delta_1)^2 = \delta_1^2 = \Delta$).

Avec un peut de jonglage, on simplifier plus cette formule de δ_1,

Ona $\delta_1 = \sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}} + \left(signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\|-a}{2}}\right) i$

donc $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}}}\left(\frac{\|\Delta\|+a}{2} + signe\,(b)\sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}}\sqrt{\frac{\|\Delta\|-a}{2}}i\right)$

$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}}}\left(\frac{\|\Delta\|+a}{2} + \frac{b}{2}i\right)$ d'apres (**)

$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+a}{2}}}\left(\frac{\|\Delta\|+a+bi}{2}\right)$

$$\delta_1 = \frac{\frac{\|\Delta\|+\Delta}{2}}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+\mathrm{Re}(\Delta)}{2}}}.$$

Part IV

Chapitre IV Les Polynômes

21 Introduction et définitions:

Définition:

Soit $K = IR$ ou C

- Une fonction polynomiale (ou un polynôme) P est une fonction de I $(\subset IR)$ vers IR qui est définit par:

$\exists n \in IN$, $\exists (a_0, a_1, ..., a_n) \in K^{n+1}$ tel que:

$$P: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & IR \\ x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$$

- Notations:

$$K[X] = \left\{ \sum_{k\geq 0} a_k X^k / \forall k \in IN, a_k \in K \text{ et } \exists n \in IN / \forall k \succ n, a_k = 0 \right\}$$

$$\deg P = n = Sup\{k \in IN / a_k \neq 0\}$$

21.1 Proprietes:

Soient $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$.

- $(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$.
- $(PQ)(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.
- $(\lambda P)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k$.
- $(PoQ)(x) = P(Q(x))$.

Définition:

Soit A, B deux polynômes,

on dit que A **divise** B (ou que A est un diviseur de B ou encore que B est multiple de A) dans $K[X]$ si $\exists Q \in K[X] / B = AQ$.

- Notation:

A/B.

- Exemple:

Déterminer les diviseurs de $X^4 - 1$.

$B(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$.

22 Division euclidienne des polynômes:

Théorème:

Soient $A \in K[X]$ et $B \in K[x]$ avec $B \neq 0$; il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant $A = BQ + R$ avec $\deg(R) \prec \deg(B)$.

Q et R sont appelés respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de A par B.

23 Racines (ou zéros) des polynômes:

Définition:

Soit $P \in K[X]$ et $x_0 \in K$; on dit que x_0 est une racine (ou un zéro) de P si $P(x_0) = 0$.

Proposition:

x_0 est une racine de P si et seulement si $(x - x_0)/P$ dans $K[X]$.

Démonstration:

On utilisant la division euclidienne de P par $(x - x_0)$

$\Longrightarrow \exists Q, R / P(x) = (x - x_0) Q(x) + R(x)$

avec $\deg(R(x)) \prec \deg(x - x_0)$

$\Longrightarrow R(x) = \lambda \in K$.

Donc $P(x) = (x - x_0) Q(x) + \lambda$

Or $P(x_0) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$

d'où le resultat. ■

Exemple:

n=2.

$P = aX^2 + bX + c = a(............)$

$= a\left(\left(........\right)^2 + ...\right)$

$\Longrightarrow P = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

$\Longrightarrow P = \frac{1}{4a}\left[(2aX + b)^2 - \Delta\right]$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si Δ est un carré dans IK, donc $\Delta = \delta^2$ (qui est toujours vraie dans $\mathbb{C}$)

alors $P = a(X - x_1)(X - x_2)$

avec $x_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

Proposition:

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Démonstration:

(On utilise le théorème des valeurs intérmédiaires).

On a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

avec $n = 2p + 1$.

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -signe(a_n)\infty$$
$$\text{et } \lim_{x \to +\infty} P(x) = signe(a_n)\infty$$

d'où le résultat. ■

Proposition:

Soit $P \in IR[X]$, $P(z) = 0 \iff P(\bar{z}) = 0$.

Démonstration:

évident.

Proposition:

Un polynôme de degré n non nul admet au plus n racines.

Corollaire:

Un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

Démonstration:

La contraposée de la proposition précédente.

Application:

La fonction cos n'est pas donc polynomiale.

Corollaire-2:

$$(\forall x \in K, a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0) \Longrightarrow (a_k = 0, \forall k)$$

.

24 Ordre de multiplicité d'une racine:

Définition:

Soient $P \in K[X]$, $x_0 \in K$ et $k \in IN$, on dit que x_0 est une **racine d'odre de multiplicité** k de P si $(X - x_0)^k / P$ mais $(X - x_0)^{k+1}$ ne divise pas P.

Remarques:

- "Ordre de multiplicité" est racourci en "**Ordre**" ou "**Multiplicité**".
- Une racine d'ordre 0 n'est pas une racine.
- Une racine d'ordre 1 est dite **Simple**.

d'ordre 2: **Double,**
d'ordre 3: **Triple.**

- Une racine d'ordre supérieure à 2 est dite **Multiple.**

Proposition:
x_0 est une racine d'ordre k de P
si et seulement si $\exists Q \in K[X] \ / \ P = (X - x_0)^k Q$,
avec $Q(x_0) \neq 0$.
Proposition:
Tout polynôme P non nul s'ecrit de façon unique sous la forme
$P = (X - x_1)^{\alpha_1} (X - x_2)^{\alpha_2} \dots (X - x_p)^{\alpha_p} Q$
avec $Q \in K[X]$ sans racines dans K.
Remarques:

- p est le **nombre de racines distinctes** de P.
- $q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$ =Sommes des ordres des racines de P est parfois appelé "**nombre de racines** de P en comptant les ordres de multiplicité".
- $p \leq q \leq n$.

25 Dérivation des polynômes; formule de Taylor:

Définition:
Le polynôme dérivé du polynôme

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est le polynôme, noté

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i$$

Propriétés:

- $P \in K \iff P' = 0$.
- Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
- $(P+Q)' = P' + Q'$, $(\lambda P)' = \lambda P'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
- $(PoQ)' = (P'oQ)\,Q'$.

25.1 Formule de Taylor:

Proposition:(Formule de Taylor pour les polynômes)
Soit $P \in K[X] \ / \ \deg(P) = n$, alors $\forall x_0 \in K$,

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(x_0)}{k!} (X - x_0)^k \\ &= P(x_0) + P'(x_0)(X - x_0) + \dots + P^{(n)}(x_0) \frac{(X - x_0)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ou bien

$$P(X + x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(x_0)}{k!} X^k.$$

Corollaire:

Un Polynôme de degré n est entierement déterminé par la connaissance de $P(x_0), P'(x_0), P''(x_0), ..., P^{(n)}(x_0)$.

Exemple:

Ecrire la formule de Taylor pour $(1+X)^n$ et $x_0 = 0$.

Proposition:

(x_0 racine d'ordre k de P)$\Longrightarrow$(x_0 racine d'ordre $(k-1)$ de P').

Théorème:

(x_0 racine d'ordre k de P)$\Longleftrightarrow$
$(P(x_0) = P'(x_0) = ... = P^{(k-1)}(x_0) = 0,\ P^{(k)}(x_0) \neq 0)$.

26 Polynômes Irréductibles. Réduction:

Définition:

Un polynôme $P \in K[X]$ est dit **réductible** ou **factorisable** (sur K) s'il est divisible par un polynôme (non constant)$\in K[X]$.

Remarques:

- Il est dit "**irréductible**" s'il est non constant et non réductible.
- Les polynômes constants ne sont ni réductibles, ni irréductibles.
- Un polynôme de $IR[X]$ peut être irréductible sur IR et réductible sur C: Exemple: X^2+1.

- Le polynôme $(X^2+1)(X^2+2) \in IR[X]$ est sans racine (reélle) et il est pourtant réductible.
- Tout polynôme (non constant) se décompose de manière unique de facteur irréductibles.

Théorème:(d'Alembert-Gauss) admis.

Tout polynôme à coefficientes complexes (non constant) posséde au moins une racine complexe.

Remarques:

- Tout polynôme à coéfficients réels non constant possède au moins une racine complexe
- Les seuls polynômes irréductibles de $C[X]$ sont les polynômes de dgré 1.

26.1 Conjugué d'un polynôme à coefficients complexes:

Définition:

Le conjugué d'un polynôme à coefficients complexes est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients: si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le conjugué de P est

$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$.

Propriétés:

$\forall P, Q \in C[X]$.

- $\forall z \in C$, $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$.

- $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{PQ} = \overline{P}.\overline{Q}$.
- $P \in IR[X] \Longleftrightarrow P = \overline{P}$.
- $\forall P \in C[X]$, $P + \overline{P} \in IR[X]$ et $P.\overline{P} \in IR[X]$.
- $z_0 \in C$ est racine de P d'ordre $\alpha \Longleftrightarrow \overline{z_0}$ est racine de $\overline{P}$ d'ordre α.

Corollaire:

Si z_0 est racine complexe non réelle d'ordre α d'un polynôme réel P, alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P d'ordre α et P est donc divisible par le polynôme à coefficients réels:

$$(X - z_0)^\alpha (X - \overline{z_0})^\alpha = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_0)\, X + |z_0|^2\right)^\alpha .$$

Exemple:

Trouver les polynômes réels de degré 4 ayant i pour racine double.

$P = (X-i)^2 (X+i)^2 = \left(X^2+1\right)^2 = X^4 + 2X^2 + 1.$

26.2 Réduction des polynômes à coefficient réels:

Corollaire: (du Théorème de l'**Alembert** pour les polynômes à coefficients réels).

Tout polynôme de degré n, de coefficient dominant a_n à coefficients réels possède sur C une décomposition unique sous la forme

$$\begin{aligned} P &= a_n (X - x_1)^{\alpha_1} \dots (X - x_p)^{\alpha_p} \times \\ &\times (X - z_1)^{\beta_1} (X - \overline{z_1})^{\beta_1} \dots (X - z_r)^{\beta_r} (X - \overline{z_r})^{\beta_r} . \end{aligned}$$

Remarques:

- Les x_k sont les p racines réelles de P, d'ordres respectifs α_k.
- Les z_k et $\overline{z_k}$ sont les $2r$ racines non réelles de P, d'ordres respectifs β_k.

$$n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k + 2 \sum_{k=1}^{r} \beta_k .$$

- Sur IR on obtient donc la décomposition

$$P = a_n (X - x_1)^{\alpha_1} \dots$$
$$\dots (X - x_p)^{\alpha_p} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1) X + |z_1|^2\right)^{\beta_1}$$
$$\dots \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_r) X + |z_r|^2\right)^{\beta_r} .$$

qui peut s'écrire aussi comme: si $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$

$$P = a_n (X - x_1)^{\alpha_1} \dots$$
$$\dots (X - x_p)^{\alpha_p} \left(X^2 - 2\rho_1 \cos(\theta_1) X + \rho_1^2\right)^{\beta_1}$$
$$\dots \left(X^2 - 2\rho_r \cos(\theta_r) X + \rho_r^2\right)^{\beta_r} .$$

Corollaire:

Les polynômes irréductibles de $IR[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré de discriminant négatif ($\Delta \prec 0$).

Corollaire:

La décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non constant de $IR[X]$ est formée de polynômes du premier degré et de polynômes du second degré de discriminant négatif ($\Delta \prec 0$).

Part V

Chapitre V

Les Fractions rationnelles

27 Introduction et Définitions:

Soit $K = IR$ ou C.

Définition:

Soient P et $Q \in IK[X]$ avec $Q \neq 0$ la fonction F définie sur K avec $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\forall x \in K$ est appellé **fraction rationnelle**. (On note $F = \frac{P}{Q}$).

Exemple: $\frac{3X^4 - X^2 + 3}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}$ et $\frac{X^2(X+1)}{X-2}$ sont des fractions sur IR.

Définition:

Deux fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont dites **équivalentes** s'il existe un polynôme non nul $P \in IK[X]$ tel que $\frac{C}{D} = \frac{P.A}{P.B}$. On dit que $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ représentent la même fraction.

Définition:

On appelle **forme irréductible** d'une fraction rationnelle F non nulle, tout couple $(A,B) \in IK[X]^2$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ tel que A et B ne possèdent pas de diviseurs communs.

27.1 Convention et notation:

On convient de représenter une fraction rationnelle par sa forme irréductible et on désigne par $IK(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur K.

Définition:

Soit $F = \frac{P}{Q} \in IK(X)$ une fraction rationnelle irréductible non nulle.

- On appelle **zéro** de la fraction F toute racine du polynôme P dans $IK[X]$.On appelle alors **ordre de multiplicité du zéro** α de F l'ordre de multiplicité α en tant que racine de P dans $IK[X]$.

- L'élément β de K est appelé **pôle** de F s'il est une racine du polynôme Q dans $IK[X]$. On appelle alors **ordre de multiplicité du pôle** β de F l'ordre de multiplicité de β en tant que racine de Q dans $IK[X]$.

Remarque:

Les notions de "zéro" et de "pôle" d'une fraction rationnelle dépandent de K considéré.

Exemples:

- Considérons dans $IR(X)$ la fraction rationnelle suivante:

$F = \frac{X^2(X-1)}{X+1}$

+ (1) est un zéro simple,
+ 0 est un zéro double,
+ (−1) est un pôle simple.

- Considérons dans $IR(X)$ la fraction rationnelle suivante: $F = \frac{(x-4)^3}{X^2+X+1}$.

+ 4 est un zéro triple,
+ F n'admet aucun pôle dans $IR(X)$.

Intention:

Bien sûr, si on travaille sur $C(X)$, alors F admet pour pôle les deux nombres complexes j et $\overline{j}$ (pôles simples).

28 Partie entière d'une fraction:

Proposition:

Soit $F = \frac{P}{Q} \in IK(X)$ une fraction rationnelle irréductible.

Alors $\exists!\,(E,R) \in IK[X]^2 \;/\; F = E + \frac{R}{Q}$

avec $\deg(R) \prec \deg(Q)$.

Le polynôme E se nomme **partie entière** de F.

Démonstration:

On utilise le Théorème de la division euclidienne (de P par Q).

Remarque:

Si $\deg(P) \prec \deg(Q)$, alors $E = 0$ et $R = P$.

Exemple:

$F = \frac{X^4}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{X^4-1}$

donc la partie entiére de F est $E = 1$.

29 Décomposition en éléments simples (D.E.S):

Théorème:
Soit $F = \frac{P}{Q} \in IK(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que Q admet une factorisation irréductible dans $IK[X]$ de la forme $Q = Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} ... Q_m^{\alpha_m}$. Alors $F = \frac{P}{Q}$ se décompose de manière unique comme:

$$F = \frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R_{k,1}}{Q_k} + \frac{R_{k,2}}{Q_k^2} + ... + \frac{R_{k,\alpha_k}}{Q_k^{\alpha_k}} \right)$$

où $E \in IK[X]$ est la partie entière et $\forall k \in \{1, ..., m\}$, $R_{k,1}; R_{k,2}; ...; R_{k,\alpha_k} \in IK[X]$ et vérifient:
$\deg(R_{k,1}) \prec \deg(Q_k)$,
$\deg(R_{k,2}) \prec \deg(Q_k)$,
...,
$\deg(R_{k,\alpha_k}) \prec \deg(Q_k)$.

29.1 Décomposition sur C:

- Rappelons que les seuls polynômes irréductibles de $C[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Soit $F = \frac{A}{B} \in C(X)$ une fraction rationnelle irréductible avec

$$B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = b_n \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}$$

avec $\alpha_k \in C$, tous distincts, et $m \leq n$

et $h_1 + h_2 + ... + h_m = n$.

- Sur C la décomposition en éléments simples de F est:

$$F = \frac{A}{B} = Q + \overbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X - \alpha_1} + ... + \frac{\lambda_{1,h_1}}{(X - \alpha_1)^{h_1}}}^{\text{partie relative au pôle } \alpha_1} + \\ + ... + \underbrace{\frac{\lambda_{m,1}}{X - \alpha_m} + ... + \frac{\lambda_{m,h_m}}{(X - \alpha_m)^{h_m}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_m}$$

où $\lambda_{1,h_1} \neq 0, ..., \lambda_{m,h_m} \neq 0$.

- Tout élément simple de $C(X)$ est nécessairement du type:

$$\frac{\lambda}{(X - \alpha)^k}$$

avec $(\lambda, \alpha) \in C^2$ et $k \in IN^*$.
Exemple:
On considère sur $C(X)$ $\frac{4}{(X^2+1)^2}$
- La partie entiere est nul car $\deg(4) \prec \deg\left(\left(X^2+1\right)^2\right)$
- $\left(X^2+1\right)^2 = (X-i)^2 (X+i)^2 \Longrightarrow \alpha_1 = i$ et $\alpha_2 = -i$
La décomposition en éléments simples sur C est

$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2}$$

en réduisant au même denominateur on trouve: $a = -i$, $b = -1$, $c = i$ et $d = -1$.

29.2 Décomposition sur IR:

Les polynômes irréductibles de $IR[X]$ sont:

- Les polynômes de degré 1.
- Les polynômes de degré 2 (avec $\Delta \prec 0$ car $\Delta \in IR$).

- Soit $F = \frac{A}{B} \in IR(X)$ irréductible.
Supposons que B se factorise sur IR comme
$B = \sum_{k=0}^{n} d_k X^k$
$B = d_n \prod_{k=1}^{m} (X-\alpha_k)^{h_k} \prod_{k=1}^{m'} \left(a_k X^2 + b_k X + c_k\right)^{s_k}$
avec $\alpha_1, ..., \alpha_m$ dans IR, tous distincts,
$h_1 + h_2 + ... + h_m + s_1 + ... + s_{m'} = n$
et $\forall k \in \{1, ..., m'\}$, $b_k^2 - 4a_k c_k \prec 0$ $(\Delta_k \prec 0)$.
D'où on trouve deux formes de sommes partielles:

- Dans le cas où F admet un pôle $\alpha \in IR$ d'ordre h:

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + ... + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

- Dans le cas où la factorisation irréductible de B fait apparaître le polynôme $\left(aX^2 + bX + c\right)^s$

avec $(a, b, c) \in IR^3$, $a \neq 0$, et $b^2 - 4ac \prec 0$:

$$\frac{\mu_1 X + \gamma_1}{aX^2 + bX + c} + ... + \frac{\mu_s X + \gamma_s}{(aX^2 + bX + c)^s}$$

avec $\mu_1, \gamma_1, ..., \mu_s, \gamma_s \in IR$.
Exemple:
Soit sur $IR(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$.

$$\begin{aligned} F &= \underbrace{E}_{\text{Partie entiere}} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}}_{\text{Partie relative au pôle 1}} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}}_{\text{Partie relative à } (X^2+1)} . \end{aligned}$$

$E = 0$ et il faut déterminer a, b, c, d, e et f.

30 Quelques techniques de décomposition:

30.1 Cas d'un pôle simple:

Soit $F = \frac{A}{B} \in IK(X)$ irréductible, possédant un pôle simple $\alpha \in K$.

$B = (X-\alpha)Q$ avec $Q \in IK[X]$ et $Q(\alpha) \neq 0$

donc $F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)Q} = \frac{\lambda}{X-\alpha} + \frac{T}{Q}$ avec $T \in IK[X]$

d'où $\frac{A}{Q} = \lambda + \frac{T(X-\alpha)}{Q}$

$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}}$ en remplaçant $X = \alpha$.

Exemple:

$F = \frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{X-2}$

donc $a_1 = [(X-1)F]_{(X=1)} = \left[\frac{X}{X-2}\right]_{(X=1)} = -1$

et $a_2 = [(X-2)F]_{(X=2)} = \left[\frac{X}{X-1}\right]_{(X=2)} = 2$

donc $F = \frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}$.

Remarque:

On a aussi la formule

$\boxed{\lambda = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}}$

30.2 Cas d'un pôle multiple:

Soit $F = \frac{A}{B} \in IK(X)$ irréductible et $\alpha \in K$ un pôle d'ordre $k \geq 2$

$B = (X-\alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$

d'où $F = \frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + \dots + \frac{a_k}{(X-\alpha)^k} + \frac{T}{Q}$

$$\boxed{a_k = \left[(X-\alpha)^k F\right]_{(X=\alpha)} = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}}$$

Cette formule ne nous permet que determiner a_k, pour le reste des coefficients on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème: (La dévision euclidienne des polynômes suivant les puissances croissantes)

$\forall A, B \in IK[X]$, $\exists! (Q, R) \in IK[X]^2$ tel que

$A = QB + X^h R$.

On dit qu'on a effectuer la division euclidienne selon les puissances croissantes à l'ordre $(h-1)$ de A par B.

Exemple-1:

$A = 4X + 4$, $B = 4 + 8X + 8X^2 + 4X^3 + X^4$

à l'ordre 1.

On trouve $A = B(1-X) + X^2(4X + 3X^2 + X^3)$.

Application:

Soit α un pôle d'ordre k de $F = \frac{A}{B}$

donc $F = \frac{A}{B} = \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \dots + \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} + \frac{T}{Q}$ et $B = (X-\alpha)^k Q$.

Posont $Y = X - \alpha$

donc $\frac{A}{(X-\alpha)^k Q} = \frac{A_1}{Y^k Q_1}$

avec $A(X) = A_1(Y)$ et $Q(X) = Q_1(Y)$

On effectue la division euclidienne selon les puissances croissantes à l'ordre $(k-1)$ de A_1 par Q_1:

donc $A_1 = Q_1(q_0 + q_1 Y + \dots + q_{k-1}Y^{k-1}) + Y^k R_1$

d'où $\frac{A_1}{Y^k Q_1} = \frac{q_0}{Y^k} + \frac{q_1}{Y^{k-1}} + \dots + \frac{q_{k-1}}{Y} + \frac{R_1}{Q_1}$

alors $\frac{A}{(X-\alpha)^k Q} = \frac{q_0}{(X-\alpha)^k} + \frac{q_1}{(X-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{q_{k-1}}{X-\alpha} + \frac{R}{Q}$

avec $R(X) = R_1(Y)$
Conclusion: $\lambda_k = q_0, \lambda_{k-1} = q_1, ..., \lambda_1 = q_{k-1}$.

Exemple-2:

$F = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{A}{(X-1)^2 Q}$

On pose $Y = X - 1 \Longleftrightarrow X = Y + 1$

$\frac{A}{(X-1)^2 Q} = \frac{A_1}{Y^2 Q_1}$

avec $A_1 = 4(Y+1) = 4 + 4Y$

et $Q_1 = \left[(Y+1)^2 + 1\right]^2 = 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4$

d'apres l'exemple-1 (la division euclidienne selon les puissances sroissantes à l'ordre 1)

$A_1 = Q_1(1-Y) + Y^2\left(4Y + 3Y^2 + Y^3\right)$

donc $\frac{A_1}{Y^2 Q_1} = \frac{1-Y}{Y^2} + \frac{4Y+3Y^2+Y^3}{Q_1}$

d'où $\frac{A_1}{Y^2 Q_1} = \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{4Y+3Y^2+Y^3}{Q_1}$

$\Longrightarrow F = \frac{A}{(X-1)^2 Q} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{R}{Q}$

avec $R_1(Y) = 4Y + 3Y^2 + Y^3 = R(X) = X^3 + X - 2$

donc $F = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2}$

On remarque que $X^3 + X - 2 = X\left(X^2+1\right) - 2$

donc $F = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}$

30.3 Utilisation de la conjugaison:

Soit $F = \frac{A}{B}$ à coefficients réels et $\alpha \in C - IR$
alors $\overline{\alpha}$ est aussi un pôle de F de même ordre que α.
Si la partie relative de α est
$\frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + ... + \frac{a_k}{(X-\alpha)^k}$ avec $a_i \in C$
alors la partie relative de $\overline{\alpha}$ est

$\frac{\overline{a_1}}{X-\overline{\alpha}} + \frac{\overline{a_2}}{(X-\overline{\alpha})^2} + ... + \frac{\overline{a_k}}{(X-\overline{\alpha})^k}$

Exemple:

$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X^2+1}{(X-j)^2(X-\overline{j})^2} = \frac{a_1}{X-j} + \frac{a_2}{(X-j)^2} + \frac{\overline{a_1}}{X-\overline{j}} + \frac{\overline{a_2}}{(X-\overline{j})^2}$

30.4 Autres Astuces:

- $\lim_{X \longrightarrow +\infty} (X.F)$

Si $F = \frac{A}{B}$ est irréductible et $deg(A) \prec \deg(B)$ alors

$$\lim_{X \to +\infty} (X.F) \prec \infty \text{ (la limite est finie)}$$

Exemple:

$F = \frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-2}$

On peut trouver facilement a_2 et b avec

$a_2 = \left[(X-1)^2 F\right]_{(X=1)} = \left[\frac{X}{X-2}\right]_{(X=1)} = -1$

$b = [(X-2)F]_{(X=2)} = \left[\frac{X}{(X-1)^2}\right]_{(X=2)} = 2$

il reste à determiner a_1

on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} (X.F) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{(x-1)^2 (x-2)}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_1 x}{x-1} + \frac{a_2 x}{(x-1)^2} + \frac{bx}{x-2}\right) \end{aligned}$$

donc $a_1 + b = 0 \Longrightarrow a_1 = -b = -2$.

- **Parité:**

Si F est paire ou impaire alors $(-\alpha)$ est un pôle de F, de même ordre que α (car $Q^{(k)}(-\alpha) = \pm Q^{(k)}(\alpha)$)

Si $\underbrace{\frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + ... + \frac{a_k}{(X-\alpha)^k}}$

Partie relative de α

et $\underbrace{\frac{b_1}{X+\alpha} + \frac{b_2}{(X+\alpha)^2} + ... + \frac{b_k}{(X+\alpha)^k}}$

Partie relative de $(-\alpha)$

alors

$$\boxed{F \text{ est paire} \Longrightarrow b_i = (-1)^i a_i}$$

$$\boxed{F \text{ est impaire} \Longrightarrow b_i = (-1)^{i-1} a_i}$$

- **Substitution:**

Comme F est égale à sa décomposition (qui est une fonction) pour toute x de K, on peut donc avoir un systéme d'equations en a_i en substituant avec des valeurs simples de x (comme $0, 1, -1, ...$).

- Réduction au même denominateur (banale).

(Chapter head:)

- Exercices -

31 Chapitre I:

Questions de cours:

- Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions? Pourquoi?

- Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution? au moins une solution? au plus une solution?

- Déterminer le rang et lensemble des solutions des systèmes linéaires suivants, (pour les deux derniers, resoudre en fonction de la valeur des parametres reels a, b et m).

$$1) \begin{cases} 2x & +4y & = & 10+2i \\ 2x & +(4+2i)\,y & = & 6+2i \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{cases}$$

$$4)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +3z & -4t & = & 4\\ & y & -z & +t & = & -3\\ x & +3y & & -3t & = & 1\\ x & +2y & +z & -4t & = & 4\end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 1\\ x & +2y & +z & = & 2\\ 3x & +4y & +5z & = & a\\ & y & +3z & = & b\end{array}\right.$$

$$6)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +(2m-1)\,z & = & 1\\ mx & +y & +z & = & -1\\ x & +my & +z & = & 3\,(m+1)\end{array}\right.$$

Exercice -7: Déterminer le rang et l'ensemble des solutions du système linéaires suivant (en fonction de la valeur des parametres reels a, b, c et m).

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1\\ ax+by+cz & = & m\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} & = & \frac{1}{m}\end{array}\right.$$

Exercice -8: Quelle quantité de lait contenant 1,5% de matière grasses doit on mélanger avec de la crème contenant 30% de matière grasse pour obtenir 10 litres de lait contenant 4,5% de matières grasse?

32 Chapitre II:

Exercice -1:

Soient $F=\{(x,y,z)\in IR^3 | x+y-z=0\}$ et $G=\{(a-b,a+b,a-3b) | a,b\in IR\}$.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de IR^3.

b) Déterminer $F\cap G$.

Exercice -2:

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de IR^2 ?

a) $\{(x,y)\in IR^2 | x\leq y\}$,

b) $\{(x,y)\in IR^2 | xy=0\}$,

c) $\{(x,y)\in IR^2 | x=y\}$,

d) $\{(x,y)\in IR^2 | x+y=1\}$.

Exercice -3:

Vérifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de IR^3 et donner une base pour chacun d'eux.

a) $A_1=\{(x,y,z)\in IR^3/x+2y+2z=0\}$;

b) $A_2=\{(\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha+\beta)\,/\alpha,\beta\in IR\}$;

c) $A_3=\{(x,y,z)\in IR^3/y+z=0 \text{ et } x=0\}$;

d) $A_4=\{(\alpha,2\alpha,\alpha)/\alpha\in IR\}$.

Exercice -4:

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E=IR^2$, $u=(1,2)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$;
2. $E=IR^3$, $u=(2,5,3)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$;
3. $E=IR^3$, $u=(3,1,m)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice -5:

Les familles suivants forment-ils des bases de IR^3?

$S1 = \{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;
$S2 = \{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$
avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;
$S3 = \{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$
avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ;
$S4 = \{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Exercice -6:

Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de IR^3. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$.

33 Chapitre III:

Exercice -1:

Mettre sous la forme $a+ib$ ($a;b \in IR$) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i}\,;\ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}\,;\ \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice -2:

On considère les nombres complexes: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$.

1) Donner la forme exponentielle de z.

2) - Donner les formes algébriques de z_1 et z_2.

- En déduire la forme algébrique de z.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice -3:

Ecrire sous la forme exponentielle
ou sous forme trigonométrique les nombres complexes:

$$z_1 = 3+\sqrt{3}i : z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} ; z_3 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$$

$$z_4 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice -4:

En utilisant les nombres complexes,

- Calculer $\cos 5q$ et $\sin 5q$ en fonction de $\cos q$ et $\sin q$.

Exercice -5:

1) Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines sécrivent 1 , j , j^2 .

- Calculer $1+j+j^2$ on pose $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$

- En déduire les racines de $1+z+z^2=0$.

2) - Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines sécrivent 1, ε, ε^2, ... , $\varepsilon^{(n-1)}$.

- En déduire les racines de

$$1+z+z^2++z^{(n-1)} = 0.$$

- Calculer, pour $p \in IN$,

$$1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+...+\varepsilon^{(n-1)p}.$$

Exercice -6:

Résoudre dans C les équations:

1. $z + \frac{1}{z} = 1$,
2. $2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$ où θ est un réel fixé ,
3. $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$,
4. $4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i) = 0$.

Probléme:

Au XVIème siècle, *Jérôme Cardan*, confronté à la résolution des équations du troisième degré, de la forme $X^3 = pX + q$ donne la formule suivante appelée formule de **CARDAN**:

lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$, l'équation a pour solution

$$x = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

1) On considère l'équetion $X^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q?

- Vérifier que l'on peut utiliser la formule de *Cardan*.
- Quelle solution obtient-on?

2) On considère l'équation $X^3 = 3X + 2$.

- Vérifier que l'on peut utiliser la formule de *Cardan*.
- Quelle solution obtient-on?
- Vérifier. (Facultatif: Trouver toutes les solutions de l'équation $X^3 = 3x + 2$)

3) On considère l'équation $X^3 = 2X + 4$.

- Vérifier que l'on peut utiliser la formule de *Cardan*.
- Donner en utilisant une calculatrice une valeur approchée de la solution obtenue.
- Vérifier. (Facultatif: Trouver toutes les solutions de l'équation $X^3 = 2x + 4$)

4) On considère l'équation $X^3 = 15X + 4$.

- Justifier que la formule de *Cardan* ne peut pas s'appliquer.
- Pris dans un engrenage infernal, on décide cependant d'appliquer la formule.

- Comment peut s'écrire la "solution"?

5) Imaginons un nombre dont le carré est -1, et qui sera trés temporairement noté $\sqrt{-1}$.

- En utilisant ce nombre "imaginaire" et en effectuant des calculs "habituels".
- Montrer que $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.
- En déduire que $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$.
- "Démontrer" de même que $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.
- Montrer alors que la formule de *Cardan* appliquée à l'équation $X^3 = 15X + 4$ donne comme solution le réel 4.
- Vérifier que 4 est effectivement solution de l'équation.
- On a donc, en utilisant des nombres "imaginaires", obtenu un résultat bien réel (et juste).

6) Que peut-on dire de $\sqrt{a}\sqrt{b}$ lorsque a et b sont deux réels strictement positifs.

- Justifier que cette propriété appliquée au nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ est en contradiction avec la définition même de ce nombre.

N.B. Pour cette raison la notation $\sqrt{-1}$ que vous avez utilisé en toute impunité depuis quelques minutes (ou quelques heures) est absolument interdite à partir de maintenant. (dans la réalité, il a fallu 150 ans pour l'abandonner et utiliser la notation i proposée par *Euler*).

34 Chapitre IV et V:

Exercice 1.
Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant : $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(0) = 1$

Exercice 2. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $1 + j = -j^2$.
2. Montrer que j est une racine multiple de P.
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $C[X]$ et puis dans $IR[X]$.

Exercice 3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1.

Exercice 4. Effectuer la division suivante les puissances croissantes de $X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$ à lordre 2.

Exercice 5. Soit $\theta \in IR$, on suppose que $\sin(n\theta) \neq 0$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} C_k^n \sin(k\theta) X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Exercice 6. Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $IR(X)$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^{2013}}$$

Exercice 7.

Soit $D = (X - r_1) \ldots\ldots (X - r_n)$ un polynôme de $IR[X]$ ayant n racines distinctes.

- Décomposer en éléments simple la fraction $\frac{D'}{D}$.

Exercice 8.

1. Décomposer dans $IR(X)$ les fractions suivantes:

$$F_1 = \frac{4x^4 + x + 1}{x^4 - 1}, \quad F_2 = \frac{x}{x^4 + 1},$$

$$F_3 = \frac{x+2}{x(x-2)^2} \text{ et } F_4 = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}.$$

2. - Décomposer en éléments simples sur $IR(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X+1)}$.
- En déduire, pour tout $n \in IN^*$ la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 9. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

1. Dans $IR(X)$.
2. Dans $C(X)$.

Exercice 10.

1. Soit $F = \frac{P}{Q}$. Si $\alpha \in C$ est une racine simple de Q, montrer que le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

2. Décomposer dans $C(X)$ la fraction

$$F = \frac{X}{X^n - 1}$$

3*. Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ puis dans $IR(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{X^n-1}$.

(Indication: pour simplifier les calculs, relier les coefficients à déterminer aux valeurs de la dérivé de $X^n - 1$ en les racines n-èmes de l'unité.)

Autres exercices:

Exercice 11.

Factoriser dans $IR[X]$ et dans $C[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Exercice 12.

Soit $P = 1 - X^8$

Factoriser P dans $C[X]$ et puis dans $IR[X]$.

Exercice 13.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $C[X]$ et dans $IR[X]$.

Exercice 14.

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que j est une racine multiple de P.

2. Factoriser P dans $C[X]$.
3. Factoriser P dans $IR[X]$.

Exercice 15.

Soit $P \in IR[X]$ défini par

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.
2. En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser P dans $C[X]$, puis dans $IR[X]$.

Exercice 16.

1. Le polynôme $P = X^4 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $IR[X]$?
2. Le polynôme $Q = X^3 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $IR[X]$?

Exercice 17.

Déterminer les réels a, b et c tels que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ soit factorisable par

$$Q = (X^2 - 1)(X - 3)$$

Exercice 18.

Pour $n \in IN$, montrer que le polynôme $P_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $Q = X^2 - X + 1$.

Exercice 19.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 20.

Quel est le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X + 1$ par $Q = (X-1)^2$?

*Exercice*21.

Soit $R \in IR[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $(X-1)^2$.

Déterminer R.

Exercice 22.

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $C[X]$, on note α, β et γ ses racines.

1. Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
3. Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.
4. On pose $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$

Calculer D en fonction de p.

Exercice 23.

Quels sont les polynômes de $C[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 24.

Soit

$$F = \frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$$

Décomposer F en éléments simples dans $IR(X)$, dans $C(X)$.

Exercice 25.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F = \frac{X^8 + X + 1}{X^4 (X-1)^3}$$

Exercice 26.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans $IR(X)$.

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^2 (X^2 + X + 1)^2}$$

Exercice 27.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans IR(X) et dans C(X)

$$G = \frac{X^5}{(X^4 - 1)^2}$$

- Solution des Exercices -

35 Chapitre I:

- Un système lineaire ne peut jamais avoir exactement 3 solutions.

Parceque l'ensemble des solutions S ne peut être que

ou bien
- Ensemble vide ($S = \emptyset$)
- Un singleton: $S = \{(x_1, ..., x_p)\}$
- Un ensemble infinie: $S = X^s + S_0$

avec S_0 le sous espace vectoriel contenant les solutions du système homogéne (c'est à dire les $b_i = 0$) S_0 obtenu à partir de S et X^s une solution particuliere de S.

- L'ensemble de solutions d'un système linéaire de n équations à n inconnues dépend du rang de ce système:

- Si $r = n$, le système est de Cramer et il a donc une et une seul solution.

- Si $r \leq n-1$,
  - le système a une infinité de solutions.

  ou bien
  - le système n'a aucune solution.

- 1)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 + 2i \\ 2x + (4+2i)\,y = 6 + 2i \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 10 + 2i \\ 2iy = -4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3i \\ y = 2i \end{cases}$$

Donc $\boxed{r = 2}$ et $\boxed{S = \{(5 - 3i, 2i)\}}$.

- 2)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 7 \\ x + y + z = 4 \\ -2x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ 2l_2 - l_1 \\ l_3 + l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ l'_3 - 2l'_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ impossible}$$

$\Longrightarrow \boxed{r = 2}$ et $\boxed{S = \emptyset}$.

- 3)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 7 \\ x + y + 2z = 4 \\ -2x + y - z = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} 2l_2 - l_1 \\ l_3 + l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \; l'_3 - 2l'_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ & y & +2z & = & 1 \\ & & -3z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & \frac{7}{3} \\ z & = & -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{r = 3}$ et $\boxed{S = \left\{\left(3, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}}$

- 4)

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} l_1 - l_3 \\ l_4 - l_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} l'_3 + 5l'_2 \\ l'_4 - 4l'_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \; l''_4 + l''_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow \boxed{r = 3}$

et

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ 0 & y & -z & +t & = & -3 \\ 0 & 0 & -2z & +4t & = & -12 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -8 \\ y & = & 3+t \\ z & = & 6+2t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{S = \{(-8, 3+t, 6+t)\,/t \in IR\}}$$

• 5)

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ 3x & +4y & +5z & = & a \\ & y & +3z & = & b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - (2l_1 + l_2) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 1 & 3 & b \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ l_4' - l_2' \\ l_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

- 1er cas: Si $a \neq 4$

alors $\boxed{r = 3}$ et $\boxed{S = \emptyset}$.

- 2éme cas: Si $a = 4$

alors, aussi $\boxed{r = 3}$

mais $\boxed{S = \left\{\left(\frac{3(1-b)}{5}, \frac{b+4}{5}, \frac{b-1}{5}\right)\right\}}$.

• 6)

$$\begin{cases} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (2m-1) & 1 \\ m & 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 3(m+1) \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} l_2 - ml_1 \\ l_3 - l_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (2m-1) & 1 \\ 0 & 1-m & -2m^2+m+1 & -m-1 \\ 0 & m-1 & 2(1-m) & 3m+2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \quad l_3' + l_2'$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (2m-1) & 1 \\ 0 & 1-m & -2m^2+m+1 & -m-1 \\ 0 & 0 & -2m^2-m+3 & 2m+1 \end{array}\right)$$

On a $-2m^2 - m + 3 = (m-1)(-2m-3)$

- 1er cas: Si $m = 1$ ou $m = -\frac{3}{2}$

alors $2m + 1 \neq 0$ et $-2m^2 - m + 3 = 0$

donc $\boxed{r = 2}$ et $\boxed{S = \emptyset}$.

- 2éme cas: Si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{3}{2}$

alors $\boxed{r = 3}$

donc le système est de Cramer

d'où $\boxed{S = \{(x(m), y(m), z(m))\}}$

avec

$$\begin{aligned} x(m) &= \frac{-3m(4m^2+m+1)}{(m-1)(2m+3)} \\ y(m) &= 2\frac{3m^2+3m+2}{(m-1)(2m+3)} \\ z(m) &= -\frac{2m+1}{(m-1)(2m+3)}. \end{aligned}$$

$-2m^2 - m + 3 = (m-1)(m+\frac{3}{2}$

Ex -7:

$$(S):\begin{cases} x & +y & +z & = & 1\\ ax & +by & +cz & = & m\\ \frac{x}{a} & +\frac{y}{b} & +\frac{z}{c} & = & \frac{1}{m}\end{cases}$$

On transforme le systéme sous le tableau (T) suivant pour effectuer la méthode du Pivot,

$$\longrightarrow \begin{array}{c} l_1\\ l_2\\ l_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & m\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{m}\end{array}\right) \quad (T)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} l_1\\ l_2-al_1\\ l_3-\frac{1}{a}l_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & m-a\\ 0 & \frac{1}{b}-\frac{1}{a} & \frac{1}{c}-\frac{1}{a} & \frac{1}{m}-\frac{1}{a}\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & m-a\\ 0 & \frac{a-b}{ab} & \frac{a-c}{ac} & \frac{a-m}{am}\end{array}\right)$$

1er cas: Si $a\neq b$ alors $b-a\neq 0$
donc

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ l_2\\ l_3+\frac{1}{ab}l_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & m-a\\ 0 & 0 & \frac{a-c}{ac}+\frac{c-a}{ab} & \frac{a-m}{am}+\frac{m-a}{ab}\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & m-a\\ 0 & 0 & \frac{(a-c)(b-c)}{abc} & \frac{(a-m)(b-m)}{abm}\end{array}\right)$$

- Si $a\neq c$ et $b\neq c$, alors $(a-c)(b-c)\neq 0$
  d'où

$$r=3$$

et le systéme est de Cramer

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \quad (1)\\ & (b-a)y & +(c-a)z & = & m-a \quad (2)\\ & & \frac{(a-c)(b-c)}{abc}z & = & \frac{(a-m)(b-m)}{abm}\end{cases}$$

donc

$$\Longrightarrow z=\frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$$

$$(2)\longrightarrow (b-a)y-\frac{c(a-m)(b-m)}{m(b-c)}=m-a$$

$$\Rightarrow (b-a)y=(m-a)+\frac{c(a-m)(b-m)}{m(b-c)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{m(m-a)(b-c)+c(a-m)(b-m)}{m(b-c)(b-a)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{(m-a)[m(b-c)-c(b-m)]}{m(b-c)(b-a)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{b(m-a)(m-c)}{m(b-c)(b-a)}$$

$$(1)\longrightarrow x=1-y-z$$

$\Rightarrow x = 1 - \frac{b(m-a)(m-c)}{m(b-c)(b-a)} - \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$

$\Rightarrow x = \frac{m(b-c)(b-a)(a-c)-b(m-a)(m-c)(a-c)-c(a-m)(b-m)(b-a)}{m(b-c)(b-a)(a-c)}$

$\Rightarrow x = \frac{m(b-c)(b-a)(a-c)-(m-a)[b(m-c)(a-c)-c(b-m)(b-a)]}{m(b-c)(b-a)(a-c)}$

on a

$[b(m-c)(a-c)-c(b-m)(b-a)] = "$

$" = bma - bmc - bac + bc^2 - cb^2 + cab + cmb - cam$

$" = bma + bc^2 - cb^2 - cam$

$" = am(b-c) + bc(c-b)$

$" = (b-c)(am-bc)$

$\Rightarrow x = \frac{m(b-c)(b-a)(a-c)-(m-a)(b-c)(am-bc)}{m(b-c)(b-a)(a-c)}$

$\Rightarrow x = \frac{(b-c)[m(b-a)(a-c)-(m-a)(am-bc)]}{m(b-c)(b-a)(a-c)}$

or $[m(b-a)(a-c)-(m-a)(am-bc)] = "$

$" = mba - mbc - ma^2 + mac - am^2 + mbc + a^2m - abc$

$" = mba + mac - am^2 - abc$

$" = ma(b-m) + ac(m-b)$

$" = a(b-m)(m-c)$

$\Rightarrow x = \frac{(b-c)a(b-m)(m-c)}{m(b-c)(b-a)(a-c)}$

$$\Rightarrow x = \frac{a(m-b)(m-c)}{m(a-b)(a-c)}$$

d'où $\quad S = \left\{\left(\frac{a(m-b)(m-c)}{m(a-b)(a-c)}, \frac{b(m-a)(m-c)}{m(b-c)(b-a)}, \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}\right)\right\}$

2ème cas: $a \neq b$ et si $c = a$ ou $c = b$
alors $\frac{(a-c)(b-c)}{abc} = 0 \Longrightarrow r \neq 3$
donc $r = 1$ ou 2

et le tableau se transforme en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & m-a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a-m)(b-m)}{abm} \end{array}\right)$$

or

$(a-m)(b-m) = 0 \Longleftrightarrow (m = a \text{ ou } m = b)$

- Si $m \neq a$ et $m \neq b$ alors le systéme est incompatible puisque $(\frac{(a-m)(b-m)}{abm} \neq 0)$

  d'où

$$r = 2$$

  et

$$S = \varnothing$$

3ème cas: Si $m = a$ ou $m = b$ (et $a \neq b$, $c = a$ ou $c = b$)
alors $(a-m)(b-m) = 0$
donc

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & m-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow r = 2$ (puisque $b \neq a$)
et

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (b-a)y+(c-a)z = m-a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{m-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a}z$$

et $x = 1 - y - z = 1 - \frac{m-a}{b-a} + \frac{c-a}{b-a}z - z$

$$\Longrightarrow x = \frac{b-m}{b-a} + \frac{c-b}{b-a}z$$

donc
$S = \left\{ \left(\frac{b-m}{b-a} + \left(\frac{c-b}{b-a}\right) t, \frac{m-a}{b-a} - \left(\frac{c-a}{b-a}\right) t, t \right) / t \in IR \right\}$
4ème cas: Si $a = b$ alors,

$$(T) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & m-a \\ 0 & 0 & \frac{a-c}{ac} & \frac{a-m}{am} \end{array} \right)$$

- Si $a = c$ alors $\frac{a-c}{ac} = 0$

  donc

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a-m}{am} \end{array} \right)$$

  – Si $a = m$ (c'est à dire $a = b = c = m$)

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  donc

$$r = 1$$

  $(S) \Longleftrightarrow x + y + z = 1$
  d'où

$$S = \left\{ (x, y, 1 - x - y) \,/\, (x, y) \in IR^2 \right\}$$

5ème cas:
$a = b$, $a = c$ et $a \neq m$
donc

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a-m}{am} \end{array} \right)$$

d'où

$$r = 1$$

Comme $m - a \neq 0$ alors le systéme est incompatible, donc

$$S = \varnothing$$

6ème cas:
$a = b$ et si $a \neq c$
alors $l_3 \longrightarrow acl_3$

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & m-a \\ 0 & 0 & a-c & \frac{c(a-m)}{m} \end{array} \right)$$

$l_3 \longrightarrow l_2 + l_3$

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & m-a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(c-m)(a-m)}{m} \end{array} \right)$$

- Si $m \neq a$ et $m \neq c$ (et $a = b$, $a \neq c$)

  alors le systéme est incompatible

  d'où

$$S = \varnothing \text{ et } r = 2 \text{ (car } a \neq c)$$

7ème cas:
$m = a$ ou $m = c$ (et $a = b$ et $a \neq c$)
alors

$$(T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & m-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc

$$r = 2 \text{ (car } a \neq c)$$

$(T) \longrightarrow (S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (c-a)\, z = m - a \end{cases}$
$\Longrightarrow z = \frac{m-a}{c-a}$
et $x = 1 - y - z = 1 - y - \frac{m-a}{c-a}$
$\Longrightarrow x = \frac{c-m}{c-a} - y$

$$S = \left\{ \left(\frac{c-m}{c-a} - y, y, \frac{m-a}{c-a} \right) / y \in IR \right\}.$$

Ex-8:
Quelle quantité de lait contenant 1,5% de matière grasses doit on mélanger avec de la crème contenant 30% de matière grasse pour obtenir 10 litres de lait contenant 4,5% de matières grasse?

Soit x la quantité de lait qu'on cherche y la quantité de la crème qu'on ajoute au mélange,
donc

$$\begin{cases} 1,5\% \times x + 30\% \times y & = 4,5\% \times 10 \\ x + y & = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 300y & = 450 \quad (l_1) \\ x + y & = 10 \quad (l_2) \end{cases}$$

$l_1 - 300 l_2 \longrightarrow -285x = 400 - 3000$
$\Longrightarrow x = \frac{2550}{285}$

$$x = 8,95 \text{ litres.}$$

36 Chapitre II:

Ex-1:
a) Montrons que F et G sont des s.e.v. de IR^3.

- $F = \{(x, y, z) \in IR^3 | x + y - z = 0\}$

$\Leftrightarrow F = \{(x, y, z) \in IR^3 | z = x + y\}$
$\Leftrightarrow F = \{(x, y, x + y) | (x, y) \in IR^2\}$
$\Leftrightarrow F = \{(x, 0, x) + (0, y, y) \,|\, (x, y) \in IR^2\}$
$\Leftrightarrow F = \{x(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 1) \,|\, (x, y) \in IR^2\}$
$\Leftrightarrow F = \langle u_1, u_2 \rangle$
avec $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$
D'où F est le s.e.v. engendré par (u_1, u_2).

- $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) | a, b \in IR\}$

$\Leftrightarrow G = \{a(1, 1, 1) + b\,(-1, 1, -3) \,| a, b \in IR\}$
$\Leftrightarrow G = \langle v_1, v_2 \rangle$
avec $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (-1, 1, -3)$

D'où G est le s.e.v. engendré par (v_1, v_2).

b) Déterminant $F \cap G$.

$(x,y,z) \in F \cap G \Longleftrightarrow (x,y,z) \in F$ et $(x,y,z) \in G$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ \exists (a,b) \in IR^2 / \begin{cases} x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ x=-4b \\ y=-2b \\ z=-6b \end{cases}$$

donc $(x,y,z) = -2b\,(2,1,3)$

d'où $F \cap G = \langle u \rangle$ avec $u = (2,1,3)$.

Ex-2: Soient

a) $\{(x,y) \in IR^2 | x \leq y\}$,

b) $\{(x,y) \in IR^2 | xy = 0\}$,

c) $\{(x,y) \in IR^2 | x = y\}$,

d) $\{(x,y) \in IR^2 | x + y = 1\}$ (voir figure).

- (a) n'est pas un s.e.v. de IR^2 car $(0,1) \in (a)$ mais $(0,-1) \notin (a)$ puisque $0 \leq 1$ mais $-1 \leq 0$.

- (b) n'est pas un s.e.v. de IR^2 car $(0,1) \in (b)$ et $(1,0) \in (b)$mais $(0,1)+(1,0) = (1,1) \notin (b)$ puisque $1 \times 1 \neq 0$.

- (c) est la droite passant par $(0,0)$ / $(c) = \langle(1,1)\rangle$ donc c'est un s.e.v. de IR^2.

- (d) n'est pas un s.e.v. de IR^2 car $(0,0) \notin (d)$.

Ex-3:

a) $A_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 / x + 2y + 2z = 0\}$

$\Leftrightarrow A_1 = \{(2y+2z, y, z) / (y,z) \in IR^2\}$

$\Leftrightarrow A_1 = \{y(2,1,0) + z\,(2,0,1) \,/\, (y,z) \in IR^2\}$

$\Leftrightarrow A_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$ avec $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (2,0,1)$.

Donc A_1 est le s.e.v. engendré par (u_1, u_2)

de plus on vérifie bien que (u_1, u_2) est une base de A_1.

b) $A_2 = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta) / \alpha, \beta \in IR\}$

$\Leftrightarrow A_2 = \{\alpha\,(1,1,1) + \beta\,(1,-1,1) / \alpha, \beta \in IR\}$

$\Leftrightarrow A_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Donc A_2 est le s.e.v. engendré par (v_1, v_2)

de plus on vérifie bien que (v_1, v_2) est une base de A_2.

c) $A_3 = \{(x,y,z) \in IR^3 / y + z = 0 \text{ et } x = 0\}$

$\Leftrightarrow A_3 = \{(0,y,-y) / y \in IR\}$

$\Leftrightarrow A_3 = \langle w \rangle$ avec $w = (0,1,-1)$.

Donc A_3 est le s.e.v. engendré par w et $\{w\}$ est donc la base de A_3.

d) $A_4 = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) / \alpha \in IR\}$

$\Leftrightarrow A_4 = \langle w' \rangle$.

Donc A_4 est le s.e.v. engendré par w' et $\{w'\}$ est donc la base de A_4.

Ex-4:

On va utiliser les deux résultats suivants:

- (u, u_1, u_2) est libre$\Longleftrightarrow$Aucun de ces vecteurs ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
- (u, u_1, u_2) est libre$\Longleftrightarrow$ $rang\,(u, u_1, u_2) = 3$.

Donc on peut utiliser la méthode de pivot de gausse pour determiner le *rang*.

1) $E = IR^2$, $u = (1,2)$, $u_1 = (1,-2)$, $u_2 = (2,3)$.

$\exists ?\,(\alpha, \beta) \in IR^2 / u = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta & = & 1 \\ -2\alpha + 3\beta & = & 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7\beta & = & 4 \\ 1 - 2\beta & = & \alpha \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta & = & \frac{4}{7} \\ \alpha & = & -\frac{1}{7} \end{cases} .$$

Donc u s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

2) $E = IR^3$, $u = (2,5,3)$, $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,-1,4)$.

Il suffit de voir si (u, u_1, u_2) est libre oui ou non, se qui reviend à calculer le rang de (u, u_1, u_2).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow rg = 3$.

Donc (u, u_1, u_2) est libre

d'où u ne s'écrit pas comme une combinaison lineaire de (u_1, u_2).

3) $E = IR^3$, $u = (3,1,m)$, $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,-1,4)$.

On efféctue le même calcule que 2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 8 & 6-m \\ 0 & -4 & 12-m \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 8 & 6-m \\ 0 & 0 & 30-3m \end{pmatrix}$$

donc le rg dépend de $30 - 3m = 3\,(10 - m)$.

1er Cas: Si $m = 10$, alors $30 - 3m = 0$,

d'où le $rg = 2$ et (u, u_1, u_2) n'est pas libre,

par conséquence u s'écrit comme combinaison lineaire de (u_1, u_2).

2éme Cas: Si $m \neq 10$, alors le $rg = 3$.

donc (u, u_1, u_2) est libre,

d'où u ne s'écrit pas comme combinaison lineaire de (u_1, u_2).

Ex-5:

On aura besoin d'utiliser les deux proprites suivantes:

1. $(v_1, v_2, ..., v_k)$ des vecteurs de E est libre si et seulement si $rg(v_1, v_2, ..., v_k) = k$.

2. $\left\{\begin{array}{l} B \text{ est libre} \\ \\ card(B) = \dim E \end{array}\right. \Longleftrightarrow B$ est une base de E

- $Card(S_1) = 2 \neq \dim IR^3 (= 3)$, donc S_1 n'est pas une base de IR^3.

- $Card(S_2) = 3 = \dim IR^3$, il suffit donc de montrer que S_2 est libre, d'où on va effectuer les mêmes calcule que dans l'Ex-4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

1er Cas: Si $a = 2$, alors le $rg = 2$, donc S_2 n'est pas libre, d'où S_2 n'est pas une base de IR^3.

2éme Cas: Si $a \neq 2$, alors le $rg = 3$, donc S_2 est libre, d'où S_2 est une base de IR^3.

- $Card(S_3) = 3 = \dim IR^3$, il suffit donc de montrer que S_3 est libre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & be \end{pmatrix}$$

1er Cas: Si $b = 0$ ou $e = 0$, alors le $rg \leq 2$, donc S_3 n'est pas libre, d'où S_3 n'est pas une base de IR^3.

2éme Cas: Si $b \neq 0$ et $e \neq 0$, alors le $rg = 3$, donc S_3 est libre, d'où S_3 est une base de IR^3.

- On a $Card(S_4) \succ \dim IR^3$, donc S_4 n'est pas une base de IR^3.

Ex-6:

Soient les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$.

- On a le $Card(u_1, u_2, u_3) = \dim IR^3 = 3$.

Donc il suffit donc de montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg = 3.$$

D'où (u_1, u_2, u_3) est libre.

Conclusion: (u_1, u_2, u_3) est une base de IR^3.

- Soit $u = (1, 1, 1)$.

On a montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base IR^3, donc $\forall u \in IR^3$, $\exists! (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in IR^3$ tel que

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les coordonnes de u dans IR^3dans la base (u_1, u_2, u_3).

Donc $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$

D'où $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont les coordonnes de u dans IR^3dans la base (u_1, u_2, u_3).

37 Chapitre III:

Ex-1: Remarquons dabord que pour $z \in C$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\begin{aligned}\frac{3+6i}{3-4i} &= \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{9-24+12i+18i}{9+16} \\ &= \frac{-15+30i}{25} \\ &= -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.\end{aligned}$$

- Calculons $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$,

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 &= \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 \\ &= \frac{-8+6i}{25} \\ &= -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} &= -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \\ &= -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.\end{aligned}$$

- Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$.

Calculons $z + \overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel et c'est $2\,\mathrm{Re}(z)$,

plus précisément :

$z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

et donc

$z + \overline{z} = -3$.

Ex-2:

1) z a pour forme exponentielle $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) La forme algébrique de z_1 est $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La forme algébrique de z_2 est $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La forme algébrique de z est $\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

3) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ex-3: $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. $z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. $z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Ex-4: Nous avons par la formule de Moivre

$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$.

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient:

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$.

Remarque: Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Ex-5: Calcul de racine n-ième.

Soit $z \in C$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi$, $k \in Z \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}$, $k \in Z$.

Les solutions sont donc $S = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in Z\right\}$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$S = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ , k = 0, ..., n-1\right\}$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $S = \left\{\varepsilon^k \ , k = 0, ..., n-1\right\}$.

Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$

pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in S - \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $S - \{1\}$.

Pour conclure soit

$$Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}.$$

Si $p = 0 + kn$, $k \in Z$ alors $Q_p(z) = p$.

Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Ex-6:

$z + \frac{1}{z} = 1$ a pour solutions: $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$ a pour solutions: $z_1 = \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{2}$ et $z_2 = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{2}$

$z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ a quatre solutions qui sont $-\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}i$, $-i$, i.

38 Chapitre IV et V:

Ex-1:

$\deg(P) \leq 2 \Longleftrightarrow \exists (a,b,c) \in IR^3 / \ P = aX^2 + bX + c$

$P(1) = 2 \Longleftrightarrow a + b + c = 2$

$P(2) = 3 \Longleftrightarrow 4a + 2b + c = 3$

$P(0) = 1 \Longleftrightarrow c = 1$

Donc $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ 4a+2b & = & 2 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$

D'où $P = X + 1$.

Ex-2:

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1) On remarque que
$j^3 = e^{2i\pi} = 1 \Longleftrightarrow j^3 - 1 = 0$
$\Longleftrightarrow (j-1)\left(1+j+j^2\right) = 0$
$j \neq 1 \Longrightarrow 1 + j + j^2 = 0 \Longrightarrow 1 + j = -j^2.$
2)

- $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1.$

$\Rightarrow P(j) = -j^{14} - j^7 - 1$ (car $1 + j = -j^2$)
or $j^3 = 1 \Rightarrow j^{3k} = 1 \ \forall k \in IN$
d'où $P(j) = -j^2 - j - 1 = 0.$

- $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$

$P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6$
$\Rightarrow P'(j) = 7(j)^{12} - 7j^6$
$\Rightarrow P'(j) = 7 - 7 = 0.$
Conclusion: $P(j) = P'(j) = 0.$
Donc $j$est une racine multiple.
3)
On remarque et on vérifie que $P(0) = P(-1) = 0$
Donc 0 et -1 sont bien deux racines évidentes de P.
4)

- On a $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et
  $(x+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_k^7 x^k$
  $= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$

donc $P = 7X^6 + ... + 7X$
d'où $\deg(P) = 6.$
D'autre part, on a montrer que,
j est une racine multiple de $P \Longrightarrow \bar{j}$ est aussi une racine multiple de P.
et 0 et 1 sont deux racines évidentes de P.
Conclusion:
$P = 7X(X-1)(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2$, dans $C[X]$ avec $\bar{j} = j^2 = -1 - j$.

- On a

$$\begin{aligned}(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2 &= \left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2 \\ &= \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(j)\,X + |j|^2\right)^2\end{aligned}$$

or $\mathrm{Re}(j) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $|j| = 1$
donc $(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2 = \left(X^2 + X + 1\right)^2$
Conclusion:
$P = 7X(X-1)\left(X^2+X+1\right)^2$, dans $IR[X]$.
Ex-3:
d'après le Théoréme de la division euclidienne:
$\exists!\,(Q,R) \in IR[X]^2 \ / \ (X+1)^n = Q\left(X^2+1\right) + R$
avec $\deg(R) \leq 1.$
Donc $\exists!\,(a,b) \in IR^2 / \ R = aX + b.$
D'où $(X+1)^n = Q\left(X^2+1\right) + aX + b.$
$(X = i) \longrightarrow (i+1)^n = ai + b$
$(X = -i) \longrightarrow (-i+1)^n = -ai + b$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a &= \frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} \\ b &= \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a &= \mathrm{Im}\left((1+i)^n\right) \\ b &= \mathrm{Re}\left((1+i)^n\right) \end{cases}$$

or $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

$\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

donc $\begin{cases} a &= \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}^n A \\ b &= \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}^n B \end{cases}$

$\Longrightarrow R = \sqrt{2}^n (AX+B)$

D'où,

$n \equiv 0\ [8]$, $A=0$, $B=1 \Longrightarrow R = \sqrt{2}^n$

$n \equiv 1\ [8]$, $A=B=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow R = \sqrt{2}^{n-1}(X+1)$

$n \equiv 2\ [8]$, $A=1$, $B=0 \Longrightarrow R = \sqrt{2}^n X$

$n \equiv 3\ [8]$, $A=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $B=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow R = \sqrt{2}^{n-1}(X-1)$

$n \equiv 4\ [8]$, $A=0$, $B=-1 \Longrightarrow R = -\sqrt{2}^n$

$n \equiv 5\ [8]$, $A=B=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow R = -\sqrt{2}^{n-1}(X+1)$

$n \equiv 6\ [8]$, $A=-1$, $B=0 \Longrightarrow R = -\sqrt{2}^n X$

$n \equiv 7\ [8]$, $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $B=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow R = \sqrt{2}^{n-1}(-X+1)$.

Ex-4:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -2X & & +X^3 & +X^4 & 1+X+X^2 \\ \cline{6-6} 1 & +X & +X^2 & & & 1-3X \\ \hline & -3X & -X^2 & +X^3 & +X^4 & \\ & -3X & -3X^2 & -3X^3 & & \\ \hline & & 2X^2 & +4X^3 & +X^4 & \end{array}$$

Donc

$X^4+X^3-2X+1 = (1-3X)\left(1+X+X^2\right) +$
$+X^2\left(2+4X+X^2\right)$

Ex-5:

1) Soit $P = \sum_{k=1}^{n} C_k^n \sin(k\theta) X^k$.

Avant tous on remarque que pour $k=0$ on a $\sin(k\theta)=0$, donc

$P = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \sin(k\theta) X^k$.

On a $\sin(k\theta) = \frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{2i}$ (Formule d'Euler), donc

$P = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\left(C_k^n e^{ik\theta}X^k - C_k^n e^{-ik\theta}X^k\right)$

$P = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(e^{i\theta}X\right)^k - \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(e^{-i\theta}X\right)^k\right)$

or $\sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k = (1+a)^n$ (Binôme de Newton), d'où

$P = \frac{1}{2i}\left[\left(1+e^{i\theta}X\right)^n - \left(1+e^{-i\theta}X\right)^n\right]$

$P(z) = 0 \Longleftrightarrow \left(1+e^{i\theta}z\right)^n - \left(1+e^{-i\theta}z\right)^n = 0$

$$P(z)=0 \iff \left(\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}\right)^n = 1$$

$$P(z)=0 \iff \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} = \xi_k,\ 0\le k\le n-1$$

avec $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ les racines niéme de 1. Donc
$P(z)=0 \iff 1+e^{i\theta}z = \xi_k\left(1+e^{-i\theta}z\right)$
D'où

$$z = \frac{\xi_k-1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}\xi_k},\ 0\le k\le n-1$$

avec la condition, $e^{i\theta}-e^{-i\theta}\xi_k\neq 0$, qui est vérifiée, car

$$\left[\begin{array}{lcc} e^{i\theta}-e^{-i\theta}\xi_k\neq 0 & \iff & \xi_k\neq e^{2i\theta}\ (\text{car } e^{i\theta}\neq 0\ \forall\theta) \\ \quad " & \iff & e^{i\frac{2k\pi}{n}}\neq e^{2i\theta} \\ \quad " & \iff & 2\theta\neq\frac{2k\pi}{n}+2h\pi \\ \quad " & \iff & n\theta\neq(k+hn)\pi \\ \text{or, } \sin(n\theta)\neq 0 & \iff & n\theta\neq K\pi,\ \forall K\in Z \\ \text{d'où le résultat.} & & \end{array}\right.$$

2) On a les proprietes suivantes:
$z\in IR \iff z=\overline{z}$
$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
$\overline{(e^{i\alpha})}=e^{-i\alpha}=\frac{1}{e^{i\alpha}}$
Calculons donc $\overline{z}$,

$$\overline{z}=\frac{\overline{\xi_k-1}}{\overline{e^{i\theta}-e^{-i\theta}\xi_k}}$$

$$" = \frac{\overline{\xi_k}-1}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}\overline{\xi_k}}$$

or $\overline{\xi_k}=\frac{1}{\xi_k}$ car $\xi_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$
d'où

$$\overline{z}=\frac{1-\xi_k}{e^{-i\theta}\xi_k-e^{i\theta}}=\frac{\xi_k-1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}\xi_k}=z$$

par conséquence $z\in IR$.

Ex-6:

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^2}{(X^2+1)^{2013}}=\frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^{2013}} \\ &= \frac{X^2+1}{(X^2+1)^{2013}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2013}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$F=\frac{1}{(X^2+1)^{2012}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2013}}$$

Ex-7:
Soit $F=\frac{D'}{D}$
$\iff F=[\log(D)]'$,
$F=[\log(X-r_1)+\log(X-r_2)+...+\log(X-r_n)]'$
$F=[\log(X-r_1)]'+[\log(X-r_2)]'+...$
$...+[\log(X-r_n)]'$

$\iff$

$$F=\frac{1}{X-r_1}+\frac{1}{X-r_2}+...+\frac{1}{X-r_n}$$

qui est bien la décomposition de F dans $IR(X)$ (d'après l'unicité de la décomposition).

Ex-8:

• **1)**

$$F_1 = \frac{4x^4 + x + 1}{x^4 - 1}$$

On remarque que le degré de numérateur est égale à celui du dénominateur, donc on doit effectuer la division euclidienne pour extraire la partie entiere de F_1.

$$F_1 = \frac{4x^4 + x + 1}{x^4 - 1} = 4 + \frac{x+5}{x^4 - 1}$$

Donc décomposant la nouvelle fraction,

$$F = \frac{x+5}{x^4 - 1}$$

D'où il faut factoriser dans $IR[X]$ le polynôme $X^4 - 1$,
$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)$

Par conséquence la décompsition de F dans $IR(X)$ en élement simple sera de la forme:

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Il ne reste que la determination des coeficients $a, b, c, d,$

$$\begin{aligned} a &= [(X-1)F]_{(X=1)} = \left[\frac{X+5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{(X=1)} \\ &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= [(X+1)F]_{(X=-1)} = \left[\frac{X+5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{(X=-1)} \\ &= \frac{4}{-4} = -1, \end{aligned}$$

$F(0) = -5$ donc $-a+b+d = -5 \Longrightarrow d = -5+a-b$, d'où $d = \frac{-5}{2}$,

$$\begin{aligned} \lim_{X\to+\infty}(XF) &= \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX^2+d}{X^2+1}\right) \\ &= a+b+c \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{X\to+\infty}(XF) &= \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X(X+5)}{X^4-1}\right) \\ &= \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X^2}{X^4}\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $a+b+c = 0 \Longrightarrow c = -a-b \Longrightarrow c = \frac{-1}{2}$,

Conclusion:

$$F_1 = 4 + \frac{\frac{3}{2}}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{X+5}{2\,(X^2+1)}$$

- $$F_2 = \frac{x}{x^4+1}$$

Il y a plusiers méthodes pour décomposer F_2 dans $IR(X)$.
La plus simple est banale, serait,
1er étape: Factorisation dans $IR[X]$ de X^4+1.

Pour ça en passera premierement par la factorisation dans $C[X]$ (car X^4+1 un polynôme qui n'a pas de racine dans IR puisqu'il ne s'annule jamais dans IR et donc il sera produit de deux polynômes de degré 2).

Factoriser X^4+1 dans $C[X]$ équivalent à chercher ces racines complexes z_1, z_2, z_3, z_4,

Or on sait que si z_1 est une racine complexe d'un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{z_1}$ l'est aussi.

Et comme X^4+1 un polynôme pair, donc si z_1 est une racine, alors $-z_1$ l'est aussi.

Donc les racines de X^4+1 sont $z, \overline{z}, -z, -\overline{z}$ avec $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ (l'une des racines $4iéme$ de -1).

D'où

$$X^4+1 = (X-z)\,(X-\overline{z})\,(X+z)\,(X+\overline{z}).$$

Et finalement en effectue les produits de chaque $(X-z)$ par son $(X-\overline{z})$, puisque on sait que

$$(X-z)\,(X-\overline{z}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,X + |z|^2$$

qui est toujours un polynôme à coefficients réels ($... \in IR[X]$).

Alors,

$$X^4+1 = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,X + |z|^2\right) \times \\ \times \left(X^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,X + |z|^2\right)$$

$$X^4+1 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

2éme étape: La décomposition de F_2.

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{X}{X^4+1} = \frac{X}{(X^2-\sqrt{2}X+1)\,(X^2+\sqrt{2}X+1)} \\ &= \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$

Pour la détermination des coefficients a, b, c, d on peut utiliser la méthode la plus simple et banale, qui est, la réduction au même dénominateur les fractions à gauche de l'égalité, et aprés identifier le numérateur obtenu avec le numérateur de la fraction à droite de l'égalité (ç'est à dire de F_2).

donc

$$F_2 = \frac{X}{X^4+1} =$$

$$= \frac{(a+c)X^3 + \left(\sqrt{2}a + b - \sqrt{2}c + d\right)X^2}{\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)} + $$
$$+ \frac{\left(a + \sqrt{2}b + c - \sqrt{2}d\right)X + b + d}{\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)}$$

d'où, $\forall X$

$$X = (a+c)X^3 + \left(\sqrt{2}a + b - \sqrt{2}c + d\right)X^2 + $$
$$+ \left(a + \sqrt{2}b + c - \sqrt{2}d\right)X + b + d$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c = 0 \\ \sqrt{2}(a-c) + b + d = 0 \\ a + c + \sqrt{2}(b-d) = 1 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c = 0 \\ a-c = 0 \\ b-d = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b+d = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ b = -d = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Conclusion:

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} - \frac{1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right]$$

Remarque: On peut décomposer la fraction F_2 dans $C(X)$ puis passer à celle de $IR(X)$.

X **2éme méthode:**$(C(X) \longrightarrow IR(X))$

$$F_2 = \frac{a}{X-z} + \frac{b}{X-\overline{z}} + \frac{c}{X+z} + \frac{d}{X+\overline{z}}$$

on a vu que (dans le cours): $b = \overline{a}$ et $d = \overline{c}$. Or

$$a = \left[(X-z)F_2\right]_{(X=z)} = -\frac{i}{4}.$$

$$c = \left[(X+z)F_2\right]_{(X=-z)} = -\frac{i}{4}.$$

Donc la décomposition dans $C(X)$:

$$F_2 = \frac{i}{4}\left[\frac{-1}{X-z} + \frac{1}{X-\overline{z}} + \frac{-1}{X+z} + \frac{1}{X+\overline{z}}\right].$$

D'où,

$$F_2 = \frac{i}{4}\left[\frac{\overline{z} - z}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{z - \overline{z}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right]$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{-1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right]$$

$$F_3 = \frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}$$

$$a = \left[XF_3\right]_{(X=0)} = \left[\frac{X+2}{(X-2)^2}\right]_{(X=0)} = \frac{1}{2}$$

$$c = \left[(X-2)^2 F_3\right]_{(X=2)} = \left[\frac{X+2}{X}\right]_{(X=2)} = 2$$

$$\lim_{X \longrightarrow +\infty} (XF_3) = a + b = 0 \Longrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$F_3 = \frac{\frac{1}{2}}{X} + \frac{-\frac{1}{2}}{X-2} + \frac{2}{(X-2)^2}.$$

$$F_4 = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}$$

Avant tous il faut factoriser le polynôme $X^3 - 3X + 2$.

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est nul, donc 1 est une racine évidente de ce polynôme, et par la suite $X-1$ divise X^3-3X+2, on éfectuant la division euclidien de $X^3 - 3X + 2$ par $X - 1$ on trouve,

$X^3 - 3X + 2 = (X-1)\left(X^2 + X - 2\right)$

pour la deuxiéme fois on remarque la somme des coefficients du polynôme X^2+X-2 est nul, donc 1 est une racine, et l'autre racine r doit vérifier

$1 \times r = -2$

$\Longrightarrow r = -2$,

d'où

$X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$

et par suite

$X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2 (X+2)$.

Donc la décomposition aura la forme suivante:

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{X^3 - 3X + 2} = \frac{1}{(X-1)^2 (X+2)} \\ &= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+2} \end{aligned}$$

$$b = \left[(X-1)^2 F_4\right]_{(X=1)} = \left[\frac{1}{X+2}\right]_{(X=1)} = \frac{1}{3}$$

$$c = \left[(X+2) F_4\right]_{(X=-2)} = \left[\frac{1}{(X-1)^2}\right]_{(X=-2)} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{X \longrightarrow +\infty} (XF_4) = a + c = 0 \Longrightarrow a = -c = -\frac{1}{9}.$$

D'où

$$F_4 = \frac{-\frac{1}{9}}{X-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{X+2}.$$

On peut toujours bien sur appliquer la méthode de la réduction au même dénominateur.

2)

- $$F(X) = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$$

avec

$$a = [XF]_{(X=0)} = \left[\frac{1}{X+1}\right]_{(X=0)} = 1$$

et

$$b = [(X+1)\,F]_{(X=-1)} = \left[\frac{1}{X}\right]_{(X=-1)} = -1.$$

d'où,

$$F(X) = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} + \frac{-1}{X+1}.$$

- En déduit que

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{j=2}^{n+1} \left(\frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

(on faisant le changement d'indice $j = k+1$)

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ex-9:

$$F\,(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

- (Dans $IR\,(X)$) Pour décomposer F dans $IR(X)$, il faut factoriser $X^4 - 1$ dans $IR[X]$.

On a $X^4 - 1 = (X-1)\,(X+1)\,(X^2+1)$

Donc

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= [(X-1)\,F]_{(X=1)} \\
&= \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)\,(X^2+1)}\right]_{(X=1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= [(X+1)F]_{(X=-1)} \\ &= \left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{(X=-1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{X\longrightarrow+\infty}(XF) &= a+b+c=6 \\ &\Longrightarrow c=6-a-b=3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(0) &= 5 \Longrightarrow -a+b+d=5 \\ &\Longrightarrow d=4. \end{aligned}$$

Remarque: *On peut remplacer par n'importe quelle valeur de X qui apartient au domaine de définition de F, et pas seulement par $X=0$, mais comme il nous rester qu'un seul coefficient d on a donc remplacer par $X=0$ qui est le plus simple et qui nous donne une équation en d.*

D'où
$$F=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{3X+4}{X^2+1}.$$

- (Dans $C(X)$) Pour décomposer F dans $C(X)$, il faut factoriser X^4-1 dans $C[X]$.

On a
$$\begin{aligned} X^4-1 &= (X-1)(X+1)(X^2+1) \\ &= (X-1)(X+1)(X+i)(X-i) \end{aligned}$$

et
$$F=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{3X+4}{X^2+1}$$

donc il suffit de décomposer la fraction
$$F'=\frac{3X+4}{X^2+1}$$

dans $C(X)$
comme $X^2+1=(X+i)(X-i)$, alors
$$F'=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+i}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= [(X-i)F']_{(X=i)} = \left[\frac{3X+4}{X+i}\right]_{(X=i)} = \frac{3i+4}{2i} \\ &= \frac{3-4i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= [(X+i)F']_{(X=-i)} = \left[\frac{3X+4}{X-i}\right]_{(X=-i)} = \frac{-3i+4}{-2i} \\ &= \frac{3+4i}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$F' = \frac{3-4i}{2(X-i)} + \frac{3+4i}{2(X+i)}$$

Conclusion: Dans $C(X)$

$$F = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3-4i}{2(X-i)} + \frac{3+4i}{2(X+i)}.$$

Ex-10:

1) $F = \frac{P}{Q}$

α est une racine simple de $Q \iff$

$\exists Q_1$ tel que $Q = (X-\alpha) Q_1$ et $Q_1(\alpha) \neq 0.$

Donc

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-\alpha) Q_1} = \frac{a}{X-\alpha} + \frac{R}{Q_1}$$

a c'est le coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$

$$\Longrightarrow \frac{P}{Q_1} = a + \frac{(X-\alpha) R}{Q_1}$$

$$(X=\alpha) \longrightarrow a = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

car $Q_1(\alpha) \neq 0$

D'autre part $Q = (X-\alpha) Q_1 \Longrightarrow Q' = Q_1 + (X-\alpha) Q_1'$

$\Longrightarrow Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$

D'où

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

2)

$$F = \frac{X}{X^n - 1}$$

1er étape: Factorisation de $X^n - 1$ dans $C[X]$.

Les racines de $X^n - 1$ sont les racines niéme de 1.

Donc sont de la forme

$$\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k = 0, 1, ..., (n-1).$$

D'où

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \xi_k).$$

2éme étape: Décomposition de F dans $C(X)$.

Donc

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \xi_k}$$

d'après 1)

$$a_k = \frac{P(\xi_k)}{Q'(\xi_k)} = \frac{\xi_k}{n\xi_k^{n-1}} = \frac{\xi_k^2}{n}$$

car $\xi_k^n = 1$

D'où

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi_k^2}{X - \xi_k}.$$

3)

$$F = \frac{1}{X^n - 1}$$

• Dans $\mathbb{C}(X)$: Comme dans 2)

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X-\xi_k} \\
\text{avec } a_k &= \frac{P(\xi_k)}{Q'(\xi_k)} = \frac{1}{n\xi_k^{n-1}} = \frac{\xi_k}{n}
\end{aligned}
$$

Donc

$$F = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi_k}{X-\xi_k}.$$

• Dans $IR(X)$:

Il y a deux cas à discuter suivant la parité de n.

Car, *on sait que les complexes de types $e^{i\theta}$ se trouvent tous sur la circonférence du cerle trigonométrique (le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1) et que dans la circonférence du cerle trigonométrique les seules réels possibles sont -1 et 1.*

De plus les racines dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme X^n-1 sont les racines niéme de 1 et ils sont de la forme $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Si $n = 2m$ (n paire), alors sur les n racines niéme de 1 il y a deux racines réelles $\xi_0 = 1$ et $\xi_m = -1$ (car $\xi_m = e^{i\frac{2m\pi}{n}} = e^{i\pi} = -1$).

Tandis que si $n = 2m+1$, alors il n'y a qu'une seul racine réelle $\xi_0 = 1$ (car $\frac{2k}{2m+1}$ pour $k \in \{0,1,...,n-1\}$ ne peut être un entier que si $k = 0$).

D'autre part pour passer la factorisation de X^n-1 de $\mathbb{C}[X]$ à $IR[X]$, il faut rassembler et calculer le produit $(X-z)(X-\overline{z})$

se qui reviend à chercher et regrouper chaque racine ξ_k et son conjugués $\overline{\xi_k}$.

Or $\overline{\xi_k} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = \xi_{-k}$, et puisque $(-k) \notin \{0,1,2,...,n-1\}$, il faut donc prendre donc un ensemble symetrique, c'est à dire prendre

$\{-m, -(m-1), ..., 0, ..., m-1\}$ au lieu de $\{0,1,2,...,n-1\}$ si $n = 2m$,

et $\{-m, -(m-1), ..., 0, ..., m\}$ au lieu de $\{0,1,2,...,n-1\}$ si $n = 2m+1$.

Remarque: *On peut facilement vérifier que dans les deux cas le nombre (le cardinale) des entiers dans ses ensembles est toujours égale à n.*

Conclusion:

1er Cas: Si $n = 2m$, alors

$$
\begin{aligned}
X^n - 1 &= \prod_{k=-m}^{m-1} (X-\xi_k) \\
&= (X-\xi_0)(X-\xi_{-m}) \prod_{k=-(m-1)}^{-1} (X-\xi_k) \prod_{k=1}^{m-1} (X-\xi_k) \\
X^n - 1 &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{m-1} (X-\xi_{-k}) \prod_{k=1}^{m-1} (X-\xi_k)
\end{aligned}
$$

car $\xi_0 = 1$ et $\xi_{-m} = -1$ et on faisant un changement d'indice (dans le premier produit) $h = -k$.

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{m-1} (X-\xi_{-k})(X-\xi_k)$$

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2 - 2\operatorname{Re}(\xi_k)X + |\xi_k|^2\right)$$

car $\overline{\xi_k} = \xi_{-k}$.
Et donc la factorisation de $X^n - 1$ dans $IR[X]$ est:

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)$$

D'où

$$F = \frac{1}{(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}$$

et donc la décomposition de F dans $C[X]$ aura la forme:

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}$$

on a donc, d'après la question précedente et l'unicité de la décomposition d'une fraction en élements simple,
$a = \frac{1}{n}$ (le coefficient relatif au pôle 1) ,
$b = -\frac{1}{n}$ (le coefficient relatif au pôle -1)

$$\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\xi_k}{X-\xi_k} + \frac{\xi_{-k}}{X-\xi_{-k}}\right)$$

$$\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\xi_k}{X-\xi_k} + \frac{\overline{\xi_k}}{X-\overline{\xi_k}}\right)$$

donc

$$a_kX + b_k = \frac{1}{n}\left[\left(\xi_k + \overline{\xi_k}\right)X - 2\left(\xi_k\overline{\xi_k}\right)\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} a_k = \frac{2\operatorname{Re}(\xi_k)}{n} = \frac{2}{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ b_k = \frac{-2|\xi_k|^2}{n} = -\frac{2}{n} \end{cases}$$

2éme cas: Si $n = 2m+1$, on effectue la même méthode que celle du 1er cas alors,

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= \prod_{k=-m}^{m}(X-\xi_k) \\ &= (X-\xi_0)\prod_{k=-m}^{-1}(X-\xi_k)\prod_{k=1}^{m}(X-\xi_k) \end{aligned}$$

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{m}(X-\xi_{-k})\prod_{k=1}^{m}(X-\xi_k)$$

car $\xi_0 = 1$ et $\xi_{-m} = -1$ et on faisant un changement d'indice (dans le premier produit) $h = -k$.

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{m}(X-\xi_{-k})(X-\xi_k)$$

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{m}\left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\xi_k)\,X + |\xi_k|^2\right)$$

car $\overline{\xi_k} = \xi_{-k}$
Et donc la factorisation de $X^n - 1$ dans $IR[X]$ est:

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{m}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)$$

D'où

$$F = \frac{1}{(X-1)\prod_{k=1}^{m}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}$$

et donc la décomposition de F dans $C[X]$ aura la forme:

$$F = \frac{a}{X-1} + \sum_{k=1}^{m}\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}$$

on a donc, d'après la question précedente et l'unicité de la décomposition d'une fraction en éléments simple,

$a = \frac{1}{n}$ (le coefficient relatif au pôle 1) ,

$$\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\xi_k}{X-\xi_k} + \frac{\xi_{-k}}{X-\xi_{-k}}\right)$$

$$\frac{a_kX + b_k}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\xi_k}{X-\xi_k} + \frac{\overline{\xi_k}}{X-\overline{\xi_k}}\right)$$

donc

$$a_kX + b_k = \frac{1}{n}\left[\left(\xi_k + \overline{\xi_k}\right)X - 2\left(\xi_k\overline{\xi_k}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lllr} a_k & = & \frac{2\,\mathrm{Re}(\xi_k)}{n} & = \frac{2}{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ b_k & = & \frac{-2|\xi_k|^2}{n} & = -\frac{2}{n} \end{array}\right.$$

D'où

$$F = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X-1} + 2\sum_{k=1}^{m}\frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X - 1}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}\right).$$

39 solution d'autres exercices:

Correction exercice 11.

Dans $IR[X]$

$$\begin{aligned} P &= -(X^8-2X^4+1) \\ &= -(X^4-1)^2 \\ &= -(X^2-1)^2(X^2+1)^2 \\ &= -(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2 \end{aligned}$$

Dans $C[X]$

$$P = -(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$$

Correction exercice 12.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1-X^4)(1+X^4)$,

On a

$(1-X^4) = (1-X)(1+X)(i-X)(i+X)$
$\quad = -(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$,

mais pour décomposer $(1+X^4)$, c'est un peut délicat, il faut utiliser une bonne ruse,

$$\begin{aligned} 1+X^4 &= 1+2X^2+X^4-2X^2 \\ &= (1+X^2)^2-(\sqrt{2}X)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1+X^2-\sqrt{2}X)(1+X^2+\sqrt{2}X) \\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

$(X^2-\sqrt{2}X+1)$ et $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ sont deux polynômes irréductibles dans $IR[X]$ car leur discriminant sont négatifs.

- Donc la décomposition de $P(X)$ dans $IR[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)\times \\ &\quad \times(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

- Pour la décomposition de $P(X)$ dans $C[X]$ il suffit de trouver les racines complexes de $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ et $(X^2+\sqrt{2}X+1)$

Le discriminant de $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ est $\Delta = (-\sqrt{2})^2-4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$, ses racines sont $X_1 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Le discriminant de $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ est $\Delta = (\sqrt{2})^2-4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$, ses racines sont $X_3 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ et $X_4 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(X+1)\left(X-i\right)\left(X+i\right)\times \\ &\quad\times\left(X-\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\times \\ &\quad\times\left(X-\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de $1-X^8=0$

$X^8 = 1 \Longleftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

- La décomposition dans $C[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-i)\times \\ &\times(X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X+1)(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})\times \\ &\times(X+i)(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}) \end{aligned}$$

- Pour la décomposition dans $IR[X]$, on regroupe les conjugués

$P(X) = -(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times$
$\times(X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})$

$P(X) = -(X-1)(X+1)(X^2+1)\times$
$\times(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1)(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1)$

$P(X) = -(X-1)(X+1)(X^2+1)\times$
$\times(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1).$

Correction exercice 13.

$P(X) = 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5 = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{1-X^6}{1-X} = 0$ et $X \neq 1$ (car $P(X)$ n'est que la somme de suite geométrique de raison X)

Donc $P(X) = 0 \Longleftrightarrow 1-X^6 = 0$ et $X \neq 1 \Longleftrightarrow X^6 = 1$ et $X \neq 1$

Or $X^6 = 1 \Longleftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\bar{j} = -j^2$, $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$, $X_3 = e^{i\pi} = -1$, $X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -j$

Les 5 racines de P sont $X_1 = -j^2$, $X_2 = j$, $X_3 = -1$, $X_4 = j^2$, $X_5 = -j$.

La décomposition dans $C[X]$ est :

$$P(X) = (X+1)(X-j)\left(X-j^2\right)\left(X+j^2\right)(X+j)$$

La décomposition dans $IR[X]$ est :

$P(X) = (X+1)(X-j)\left(X-j^2\right)\left(X+j^2\right)(X+j)$
$= (X+1)(X^2-(j+j^2)X+j^3)\left(X^2+(j+j^2)X+j^3\right) =$
$(X+1)\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-X+1\right).$

Correction exercice 14.

1.

$P(j) = j^6+2j^5+4j^4+4J^3+4j^2+2j+1$
$= 1+2j^2+4j+4+4j^2+2j+1 = 6j^2+6j+6$
$= 6\left(j^2+j+1\right) = 0$

On a $P' = 6X^5+10X^4+16X^3+12X^2+8X+2$

donc $P'(j) = 6j^5+10j^4+16j^3+12j^2+8j+2$
$= 6j^2+10j+16+12j^2+8j+2$
$= 18j^2+18j+18 = 18\left(j^2+j+1\right) = 0$

Donc j est une racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi une racine double.

On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on remarque que i est une racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser donc P par

$(X-j)^2(X-\bar{j})^2 = \left[(X-j)(X-\bar{j})\right]^2 = \left(X^2+X+1\right)^2 =$
$X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X$
$= X^4+2X^3+3X^2+2X+1$

$$\begin{array}{r|l} X^6+2X^5+4X^4+4X^3+4X^2+2X+1 & X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \\ \underline{X^6+2X^5+3X^4+2X^3+X^2} & \overline{X^2+1} \\ X^4+2X^3+3X^2+2X+1 & \\ \underline{X^4+2X^3+3X^2+2X+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc

$$P=(X-j)^2(X-\bar{j})^2(X-i)(X+i)$$

3.

$$P=\left(X^2+X+1\right)^2\left(X^2+1\right)$$

Correction exercice 15.

1.

$$\begin{aligned} P(j) &= j^8+2j^6+3j^4+2j^2+1 \\ &= j^2+2+3j+2j^2+1 \\ &= 3j^2+3j+3 \\ &= 3(j^2+j+1)=0 \end{aligned}$$

donc j est une racine de P

$$P'=8X^7+12X^5+12X^3+4X$$

$$\begin{aligned} P'(j) &= 8j^7+12j^5+12j^3+4j \\ &= 8j+12j^2+12+4j \\ &= 12j^2+12j+12=12\left(j^2+j+1\right)=0 \end{aligned}$$

d'où j est une racine au moins double, j est donc une racine multiple.

2. Comme P est pair, $-j$ est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc $\bar{j}=j^2$ est une racine double et $\overline{-j}=-j^2$ est aussi une racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme

ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans $C[X]$

$$P=(X-j)^2\left(X-j^2\right)^2(X+j)^2\left(X+j^2\right)^2$$

Dans $IR[X]$

$$P=\left[(X-j)\left(X-j^2\right)\right]^2\left[(X+j)\left(X+j^2\right)\right]^2$$

$$P=\left[X^2+X+1\right]^2\left[X^2-X+1\right]^2$$

Correction exercice 16.

1. La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.

2. Les limites de la fonction polynômiale définie par $Q(x)=x^3+3x+1$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ et en $+\infty$ vaut $+\infty$, cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe x_0 tel que $Q(x_0)=0$. Q admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Correction exercice 17.

$P=X^5-2X^4-6X^3+aX^2+bX+c$ est factorisable par $Q=(X^2-1)(X-3)$ si et seulement si -1, 1 et 3 sont des racines de P.

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^5-2(-1)^4-6(-1)^3+ \\ &\quad +a(-1)^2+b(-1)+c=0 \end{aligned}$$

$$P(1)=(1)^5-2(1)^4-6(1)^3+$$

$$+a(1)^2+b(1)+c=0$$

$$P(3)=(3)^5-2(3)^4-6(3)^3+$$
$$+a(3)^2+b(3)+c=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=-3 \\ a+b+c=7 \\ 9a+3b+c=81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases}$$

Finalement

$$P=X^5-2X^4-6X^3+8X^2+5X-6$$

Correction exercice 18.

P_n est divisible par Q si et seulement si les racines de Q sont aussi des racines de P_n.

Le discriminant de X^2-X+1 est $\Delta=1-4=-3$ donc les deux racines de Q sont :

$$X_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=-j^2$$

$$X_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-j$$

Remarque : $X^2-X+1=0 \Leftrightarrow (-X)^2-(-X)+1=0$

Donc les racines du polynôme Q vérifient

$$-X=j \text{ ou } -X=j^2$$

On vérifie bien que

$$P_n(-j)=(-j-1)^{n+2}+(-j)^{2n+1}$$
$$=(j^2)^n(j^2)^2+(-j)^{2n}(-j)$$
$$=j^{2n}j^4-j^{2n}j=0$$

Comme P_n est un polynôme à coefficients réels, $-\bar{j}=-j^2$ est aussi racine.

On conclut que X^2-X+1 divisise $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$.

Correction exercice 19.

Il existe $A,R\in IR[X]$ tels que

$$X^n+X+1=A(X-1)^2+R \qquad (1)$$

Avec $d^0R \prec 2$ donc il existe $a,b\in IR$ tels que $R=aX+b$, ce qui entraine que $R'=a$

Prenons $X=1$

$$3=R(1)=a+b$$

On dérive (1)

$$nX^{n-1}+1=A'(X-1)^2+A(X-1)+R'$$

On prend $X=1$

$$n+1=a$$

On en déduit que

$$b=3-a=3-(n+1)=2-n$$

Et finalement

$$R = (n+1)\,X + 2 - n$$

Correction exercice 20.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or $d^0 \prec 2$ et donc $R = aX + b$.
On pose $X = i$.
$(i+1)^n = ai + b$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = b + ai$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = b + ai$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}} = b + ai$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b + ai$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$
Donc

$$R = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X$$

Correction exercice 21.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes, avec $d^0 R \leq 1$ tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + R$$

Il existe a et b des réels tels que $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + aX + b \qquad (1)$$

On pose $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive (1)

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$$

On pose $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc $b = 2^n - n2^{n-1}$
Finalement

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Correction exercice 22.
1. On rappelle que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ et $\alpha\beta\gamma = -q$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Donc

$$A = 0^2 - 2p = -2p$$

2. $\alpha^3 + p\alpha + q = 0 \Longrightarrow \alpha^3 = -p\alpha - q$

la même chose pour β et γ.
donc

$$\begin{aligned} B &= -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q \\ &= -p(\alpha+\beta+\gamma) - 3q \\ &= -3q \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= \alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha\gamma(\alpha+\gamma) + \beta\gamma(\beta+\gamma) \\ &= \alpha\beta(-\gamma) + \alpha\gamma(-\beta) + \beta\gamma(-\alpha) = -3\alpha\beta\gamma \\ &= 3q \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} D &= \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 \\ &= \alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \alpha\gamma\left(\alpha^2+\gamma^2\right) + \beta\gamma\left(\beta^2+\gamma^2\right) \\ &= \alpha\beta\left(-2p-\gamma^2\right) + \alpha\gamma\left(-2p-\beta^2\right) + \beta\gamma\left(-2p-\alpha^2\right) \\ &= -2p(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - \alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\beta\gamma \\ &= -2p^2 - \alpha\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha) \\ &= -2p^2 - (q)\times 0 \\ &= -2p^2 \end{aligned}$$

Correction exercice 23.

On pose $d^0P = n$.
P' divise P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P = QP'$$

d'autre part

$$d^0P = n \text{ et } d^0P' = n-1 \Longrightarrow d^0Q = 1$$

Donc Q admet une racine complexe α.
On pose $Q = aX + b$ et $P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ (avec $a_n \neq 0$)
alors

$$P' = na_nX^{n-1} + ... + a_1$$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$\begin{aligned} a_n &= naa_n \\ &\Longleftrightarrow a = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Première méthode :
La formule de Taylor pour le polynôme P en α donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k(X-\alpha)^k$$

$$P = a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + ... + a_n(X-\alpha)^n$$

Donc

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^{n} ka_k(X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k(X-\alpha)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_{k+1}(X-\alpha)^k \\ &= a_1 + 2a_2\,(X-\alpha) + \dots + na_n\,(X-\alpha)^{n-1} \end{aligned}$$

En changeant k en $k+1$.

Comme Q est un polynôme de degré 1 dont α est une racine donc $Q = \frac{1}{n}(X-\alpha)$

On remplace ces deux expressions dans $P = QP'$.

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1\,(X-\alpha) + a_2\,(X-\alpha)^2 + \dots + a_n\,(X-\alpha)^n \\ = \ & a\,(X-\alpha)\left[a_1 + 2a_2\,(X-\alpha) + \dots + na_n\,(X-\alpha)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1\,(X-\alpha) + a_2\,(X-\alpha)^2 + \dots + a_n\,(X-\alpha)^n \\ = \ & \frac{1}{n}a_1\,(X-\alpha) + \frac{2}{n}a_2\,(X-\alpha)^2 + \dots + \frac{n}{n}a_n\,(X-\alpha)^n \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{2}{n}a_1 \\ \vdots \\ a_k = \frac{k+1}{n}a_k \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_k = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{array}\right.$$

Donc

$$P = a_n\,(X-\alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant $P = QP'$, et on rappelle que $Q' = \frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP" \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP"$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP" \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP"$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P"$$

En dérivant $(1 - \frac{1}{n})P' = QP"$

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{n})P" &= Q'P" + QP''' = \frac{1}{n}P" + QP''' \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P" = QP''' \\ &\Leftrightarrow P" = \frac{n}{n-2}QP''' \end{aligned}$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P" = \frac{n^2}{(n-1)\,(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. On montre par récurrence que

$$(1 - \frac{k}{n})P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)...(n-k)} Q^{k+1} P^{(k+1)}$$

On dérive $(1 - \frac{k}{n}) P^{(k)} = QP^{(k+1)}$

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{k}{n}\right) P^{(k+1)} &= Q'P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} \\ &= \frac{1}{n}P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) P^{(k+1)} = QP^{(k+2)} \\ \Leftrightarrow & P^{(k+1)} = \frac{n}{n-k-1} QP^{(k+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= \frac{n^k}{(n-1)(n-2)...(n-k)} Q^{k+1} P^{(k+1)} \\ &= \frac{n^k}{(n-1)(n-2)...(n-k)} Q^{k+1} \times \\ & \times \frac{n}{n-k-1} QP^{(k+2)} \\ &= \frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)...(n-k)(n-(k+1))} \times \\ & \times Q^{k+2} P^{(k+2)}\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $c \leq n-1$.

On l'applique au rang $n-1$:

$$P = \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)...(n-(n-1))} Q^n P^{(n)}$$

$P^{(n)} = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 \times a_n$ (ce qui est important c'est que c'est une constante).

Peu importe la constante, il est clair que $P = KQ^n$, comme Q est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

Correction exercice 24.

$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}$ (1)

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$

$$d=\left[\frac{3}{X^2+X+1}\right]_{X=1}=1$$

Première méthode

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$

$$\begin{aligned} aj+b &= \left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j}=\frac{3}{(j-1)^2} \\ &= \frac{3}{j^2-2j+1}=\frac{3}{-3j}=-\frac{1}{j} \\ &= -j^2=1+j \end{aligned}$$

Donc $b=1$ et $a=1$

On prend dans $X=0$ dans (1)

$$\begin{aligned} 3 &= b-c+d \\ &\Longrightarrow c=-3+b+d \\ c &= -3+1+1=-1 \end{aligned}$$

Et donc

$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$

Deuxième méthode

$X=0$ dans (1)

$$\begin{aligned} 3 &= b-c+d \Longleftrightarrow b-c=3-d=2 \\ &\Longleftrightarrow b=2+c \end{aligned}$$

On multiplie par X, puis $X\longrightarrow+\infty$

$$\begin{aligned} 0 &= a+c \\ &\Longleftrightarrow a=-c \end{aligned}$$

$X=-1$ dans (1)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= -a+b-\frac{c}{2}+\frac{d}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}=c+(2+c)-\frac{c}{2}+\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}-\frac{1}{4}-2=\frac{3}{2}c \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}=\frac{3}{2}c \\ &\Leftrightarrow c=-1 \end{aligned}$$

$a=1$ $b=1$

Et donc

$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$

Pour la décomposition dans $C(X)$, il suffit de décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$, comme

$$X^2+X+1=(X-j)\left(X-j^2\right)$$

Il existe $\alpha\in C$ tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{\alpha}{X-j}+\frac{\overline{\alpha}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$\begin{aligned}\alpha &= \left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j} = \frac{j+1}{j-j^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

$$\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$

Conclusion:

$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$

Correction exercice 25.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$\begin{aligned}X^4(X-1)^3 &= X^4\left(X^3-3X^2+3X-1\right) \\ &= X^7-3X^6+3X^5-X^4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} X^8+X+1 & X^7-3X^6+3X^5-X^4 \\ \underline{X^8-3X^7+3X^6-X^5} & \overline{X+3} \\ 3X^7-3X^6+X^5+X+1 & \\ \underline{3X^7-9X^6+9X^5-3X^4} & \\ 6X^6-8X^5+3X^4+X+1 & \end{array}$$

$$\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3} = \frac{(X^7-3X^6+3X^5-X^4)(X+3)+6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

$$= X+3+\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

On pose alors

$$G(X) = \frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de $1+X+3X^4-8X^5+6X^6$ par $(X-1)^3 = -1+3X-3X^2+X^3$ à l'ordre $4-1=3$ (Le 4 est le 4 de X^4)

$$\begin{array}{l|l} 1+X+3X^4-8X^5+6X^6 & -1+3X-3X^2+X^3 \\ \underline{1-3X+3X^2-X^3} & \overline{-1-4X-9X^2-16X^3} \\ 4X-3X^2+X^3+3X^4-8X^5+6X^6 & \\ \underline{4X-12X^2+12X^3-4X^4} & \\ 9X^2-11X^3+7X^4-8X^5+6X^6 & \\ \underline{9X^2-27X^3+27X^4-9X^5} & \\ 16X^3-20X^4+X^5+6X^6 & \\ \underline{16X^3-48X^4+48X^5-16X^6} & \\ 28X^4-47X^5+22X^6 & \end{array}$$

Soit

$$\boxed{P = 1+X+3X^4-8X^5+6X^6}$$

donc,

$$\begin{aligned}P &= \left(-1+3X-3X^2+X^3\right)\left(-1-4X-9X^2-16X^3\right)+ \\ &\quad +28X^4-47X^5+22X^6\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{P}{(X-1)^3}=\frac{\cancel{\left(-1+3X-3X^2+X^3\right)}\left(-1-4X-9X^2-16X^3\right)}{\cancel{(X-1)^3}}+$$
$$+\frac{28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{P}{(X-1)^3} = -1-4X-9X^2-16X^3+$$
$$+\frac{28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}=\frac{-1-4X-9X^2-16X^3}{X^4}+$$
$$+\frac{28X^4-47X^5+22X^6}{X^4(X-1)^3}$$

$\Leftrightarrow$

$$G=-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}$$

On pose alors

$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}$

On multiplie par $(X-1)^3$, puis en remplace par $X=1$.

$$c=[28-47X+22X^2]_{X=1}=3$$

On multiplie par X, puis en tend $X\longrightarrow+\infty$

$$22=a$$

En remplacant par $X=0$,

$$28=-a+b-c\Leftrightarrow b=53$$

Donc

$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{22}{X-1}+\frac{53}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$

Conclusion:

$F=X+3-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{22}{X-1}+$
$+\frac{53}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$

Correction exercice 26.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2}$

On multiplie par X^2, puis $X=0$.

$$b=\left[\frac{X^4+1}{\left(X^2+X+1\right)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $\left(X^2+X+1\right)^2$, puis $X=j$.

$$\begin{aligned} ej+f &= \left[\frac{X^4+1}{X^2}\right]_{X=j} \\ &= \frac{j^4+1}{j^2}=\frac{j+1}{j^2}=\frac{-j^2}{j^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc $e=0$ et $f=-1$.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par X puis faire tendre X vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et donc c'est pénible,

alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

On a

$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$

$\Leftrightarrow$

$$G = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

$$G = \frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

D'une part

$$G = \frac{X^4+1-(X^2+X+1)^2+X^2}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

$$G = \frac{X^4+X^2+1-(X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

$$G = \frac{-2X^3-2X^2-2X}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

$$G = \frac{-2}{X(X^2+X+1)}$$

On a donc

$$G = \frac{-2}{X(X^2+X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On multiplie par X, puis $X=0$

$$a = \left[\frac{-2}{X^2+X+1}\right]_{X=0} = -2$$

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$.

$$cj+d = \left[\frac{-2}{X^2}\right]_{X=j} = \frac{-2}{j^2} = -2j$$

Donc $c=-2$ et $d=0$

Conclusion:

$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-2X}{X^2+X+1} + \frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$

Correction exercice 27.

$F = \frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{X^5}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}$

$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X-i} + \frac{f}{(X-i)^2} + \frac{\bar{e}}{X+i} + \frac{\bar{f}}{(X+i)^2}$

Avec a,b,c,d sont réels et e,f sont complexes.

Il est facile de trouver b,d et f.

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$\begin{aligned} b &= \left[\frac{X^5}{(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=1} \\ &= \left[\frac{X^5}{(X+1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=1} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

On multiplie par $(X+1)^2$, puis $X=-1$

$$
\begin{aligned}
d &= \left[\frac{X^5}{(X-1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=-1} \\
&= \left[\frac{X^5}{(X-1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=-1} \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

On multiplie par $(X-i)^2$, puis $X=i$

$$
\begin{aligned}
f &= \left[\frac{X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=i} \\
&= \left[\frac{X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=i} \\
&= \frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2} = \frac{16i}{4(-4)} \\
&= -\frac{i}{16}
\end{aligned}
$$

F est impaire donc $F(-X)=-F(X)$, soit encore : $-F(-X)=F(X)$

$-F(-X) = -(\frac{a}{-X-1}+\frac{b}{(-X-1)^2}+\frac{c}{-X+1}+\frac{d}{(-X+1)^2})+$
$-(\frac{e}{-X-i}+\frac{f}{(-X-i)^2}+\frac{\overline{e}}{-X+i}+\frac{\overline{f}}{(-X+i)^2})$

$-F(-X) = \frac{a}{X+1}-\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-1}-\frac{d}{(X-1)^2}+$
$+\frac{e}{X+i}-\frac{f}{(X+i)^2}+\frac{\overline{e}}{X-i}-\frac{\overline{f}}{(X-i)^2}$

En identifiant les coefficients avec ceux de $F(X)$, on a :

$a=c$, $b=-d$, $e=\overline{e}$ et $f=-\overline{f}$
donc e est réel et f est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

$X=0$ donne
$F(0)=0=-a+b+c+d+ie-f-i\overline{e}-\overline{f}$
$=-a+c+i(e-\overline{e})$
Car $b+d=0$ et $-f-\overline{f}=\frac{i}{16}-\frac{i}{16}=0$
Cela donne
$0=-a+c+i(e-\overline{e})$
$=-a+c+2i(i\,\mathrm{Im}(e))$
$=-a+c-2\,\mathrm{Im}(e)$
Or $a=c$ donc $\mathrm{Im}(e)=0$ autrement dit e est réel.
On multiplie par X, puis je fais tendre X vers ∞.

$$
\begin{aligned}
0 &= a+c+e+\overline{e} \\
&= 2a+2e
\end{aligned}
$$

Donc $e=-a$
Comme $c=a$, $b=1$, $d=-\frac{1}{16}$ et $f=-\frac{i}{16}$
On a :
$F=\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{a}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}+$
$-\frac{a}{X-i}-\frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2}-\frac{a}{X+i}+\frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$
Ceci étant vrai $\forall X\in\mathbb{C}\backslash\{-1,1,-i,i\}$, on prends $X=2$.

$$F(2) = \frac{32}{(16-1)^2} = \frac{a}{2-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(2-1)^2} + \frac{a}{2+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(2+1)^2} + \\ - \frac{a}{2-i} - \frac{\frac{i}{16}}{(2-i)^2} - \frac{a}{2+i} + \frac{\frac{i}{16}}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{15^2} = a + \frac{1}{16} + \frac{a}{3} - \frac{1}{16\times 9} - \frac{a(2+i)}{5} + \\ - \frac{i(2+i)^2}{16\times 25} - \frac{a(2-i)}{5} + \frac{i(2-i)^2}{16\times 25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{15^2} = \frac{4a}{3} + \frac{8}{16\times 9} - \frac{4a}{5} - \frac{i(3+4i)}{16\times 25} + \frac{i(3-4i)}{16\times 25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{15^2} = \frac{8a}{15} + \frac{8}{16\times 9} + \frac{8}{16\times 25}$$

$$\Leftrightarrow 32 = 8 \times 15a + 15^2 \times 8 \times \left(\frac{25+9}{16\times 9\times 25}\right)$$

$$\Leftrightarrow 32 = 120 \times a + 17$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{32-17}{120} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$$

Donc

$$F = \frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}\right) + \\ + \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{X-i} - \frac{i}{(X-i)^2} - \frac{2}{X+i} + \frac{i}{(X+i)^2}\right)$$

Ensuite pour décomposer dans $IR[X]$ il faut réunir les conjugués.

$$F = \frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}\right) + \\ + \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{X+i} - \frac{2}{X-i} + \frac{i}{(X+i)^2} - \frac{i}{(X-i)^2}\right)$$

$$F = \frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1}\right) + \\ + \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2+1} - \frac{4x}{(X^2+1)^2}\right)$$

2ème Méthode:

On décompose directement la fraction dans $IR[X]$.
Où mieux pour les simplifications on décompose

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$$

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \\ + \frac{\delta}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}$$

De la même façon, on trouve $\beta = 1$ et $\delta = -1$
On multiplie par $(X^2+1)^2$, puis je prends $X = i$

$$\begin{aligned} \eta i + \theta &= \left[\frac{16X^5}{\left(X^2-1\right)^2}\right]_{X=i} \\ &= \frac{16i^5}{\left(-1-1\right)^2} = 4i \end{aligned}$$

Donc $\eta = 4$ et $\theta = 0$.
F est impaire donc $-F(-X) = F(X)$

$$-F(-X) = -\left(\frac{\alpha}{-X-1} + \frac{\beta}{(-X-1)^2} + \frac{\gamma}{-X+1}\right) + \\ - \left(\frac{\delta}{(-X+1)^2} + \frac{-\epsilon X+\zeta}{X^2+1} + \frac{-\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}\right)$$

$$-F(-X) = \frac{\alpha}{X+1} - \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{X-1} + \\ - \frac{\delta}{(X-1)^2} + \frac{\epsilon X-\zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X-\theta}{(X^2+1)^2}$$

$$-F(-X) = F(X) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = & \gamma \\ \beta = & -\delta \\ \zeta = & 0 \\ \theta = & 0 \end{cases}$$

On savait déjà que $\beta = -\delta$ et que $\theta = 0$.
Donc

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \\ - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\epsilon X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On multiplie par X, puis on tend X vers ∞.

$$0 = \alpha + \gamma + \varepsilon$$

Comme $\alpha = \gamma$, on a $\varepsilon = -2\gamma$.
Si on prend $X = 0$ alors $\alpha = \gamma$ qui n'est pas interessant .
Pour l'instant on a :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \\ -\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2\gamma X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Comme dans $\mathbb{C}[X]$, on va prendre $X = 2$.

$$\frac{16\times 32}{(16-1)^2} = \gamma + 1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{9} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{25}$$

$$\iff \frac{16\times 32}{(15)^2} = \frac{4\gamma}{3} + \frac{8}{9} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{25}$$

$$\iff \frac{16\times 32}{(15)^2} = \frac{8\gamma}{5} + \frac{8\times 34}{9\times 25}$$

$$\iff 2\times 32 = 15\gamma + 34$$

$$\iff \gamma = 2$$

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} + \\ -\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.

A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2+1} = \frac{a}{X-i} + \frac{\overline{a}}{X+i}$$

et

$$\frac{4X}{(X^2+1)^2} = \frac{b}{X-i} + \frac{\overline{b}}{X+i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{\overline{c}}{(X+i)^2}$$

A faire.

Troisième méthode.

On repart de

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \\ -\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} + \\ + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On va calculer

$$\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{4X}{(X^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(X+1)^2\left(X^2+1\right)^2 - (X-1)^2\left(X^2+1\right)^2 + 4X(X-1)^2(X+1)^2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[(X+1)^2-(X-1)^2\right]\left(X^2+1\right)^2 + 4X(X-1)^2(X+1)^2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[X^2+2X+1-X^2+2X-1\right]\left(X^4+2X^2+1\right) + 4X\left(X^4-2X^2+1\right)}{(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{4X\left(X^4+2X^2+1\right) + 4X\left(X^4-2X^2+1\right)}{(X^4-1)^2}$$

$$= \frac{8X\left(X^4+1\right)}{(X^4-1)^2}$$

Donc

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \\ -\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} + \frac{8X\left(X^4+1\right)}{(X^4-1)^2}$$

$$F - \frac{8X\left(X^4+1\right)}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{16X^5}{(X^4-1)^2} - \frac{8X\left(X^4+1\right)}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{16X^5-8X\left(X^4+1\right)}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{16X^5-8X^5-8X}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{8X^5-8X}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{8X\left(X^4-1\right)}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\frac{8X}{(X^4-1)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$\frac{8X}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$
On multiplie par $X-1$, puis $X=1$

$$\alpha = \left[\frac{8X}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1} = 2$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$\beta = \left[\frac{8X}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = 2$$

On multiplie par X^2+1, puis $X=i$

$$\varepsilon + i\zeta = \left[\frac{8X}{X^2-1}\right]_{X=i} = -4i$$

$\Longrightarrow \varepsilon = 0$ et $\zeta = -4$
Donc
$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1} = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} - \frac{4X}{X^2+1}$
Et enfin
$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} +$
$-\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$
Il ne reste qu'à diviser par 16.

DESCRIPTIF DE MODULE
1. IDENTIFICATION DU MODULE : TOUS LES PARCOURS DE SMCP
Nature du module (Outil, Disciplinaire, parcours):DISCIPLINAIRE
Objectifs du module:

- Développer les méthodes pour résoudre les équations algébriques linéaires, ainsi que les méthodes pour décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

Pré-requis pédagogiques: Calculs algébriques, ...
2. IDENTIFICATION DU COORDONNATEUR DU MODULE
(Rappel : le coordonnateur du module appartient au département d'attache du module.)
Nom et Prénom: Aziz Arbai
Grade: P.E.S - C
Spécialité (s): Algèbre, Analyse, Statistique et Probabilité, ...
Département: Mathématiques
Etablissement: Faculté des Sciences de Tétouan
Université: Abdelmalek Essaadi
- Algèbre 1: Contenu :
- Systèmes d'équations linéaires et résolution par la méthode de Gauss ou pivots,
- Propriétés vectorielles de n : Famille libres, famille génératrices, notion de base et base canonique,
- Le plan 2 et le corps C des nombres complexes,
- Fonctions polynomiales. Polynôme irréductible dans et dans . Fractions rationnelles.
- Division euclidienne et division suivant les puissances croissantes.
- Décomposition des fractions en éléments simples dans et dans .

$$\delta = \pm \frac{\frac{\|\Delta\|+\Delta}{2}}{\sqrt{\frac{\|\Delta\|+\mathrm{Re}(\Delta)}{2}}}$$

𝔄𝔷𝔦𝔷.40